Funções racionais

DelftX: CalcSP01x Pre-University Calculus (Self-Paced)

1.4 Rational Functions

Rational functions

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ for polynomials $P(x), Q(x)$

Domain: excludes points with $Q(x) = 0$

Examples:

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{1} \qquad \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \qquad 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

Adding rational functions

To add: put over a common denominator

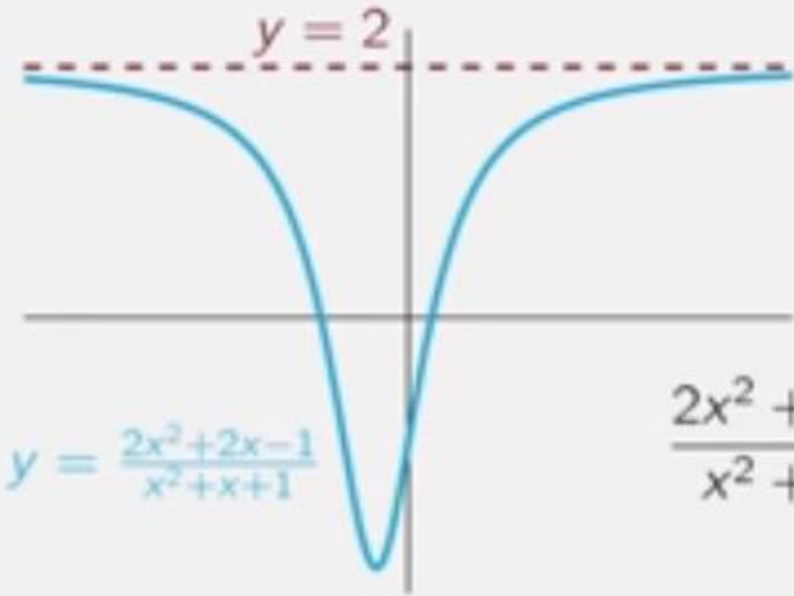
$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2+2} = \frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+2)}+\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2)}$$

$$= \frac{x^2+x}{(x-2)(x^2+2)}$$

Redução ao mesmo denominador: Mínimo múltiplo comum

Horizontal asymptotes

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

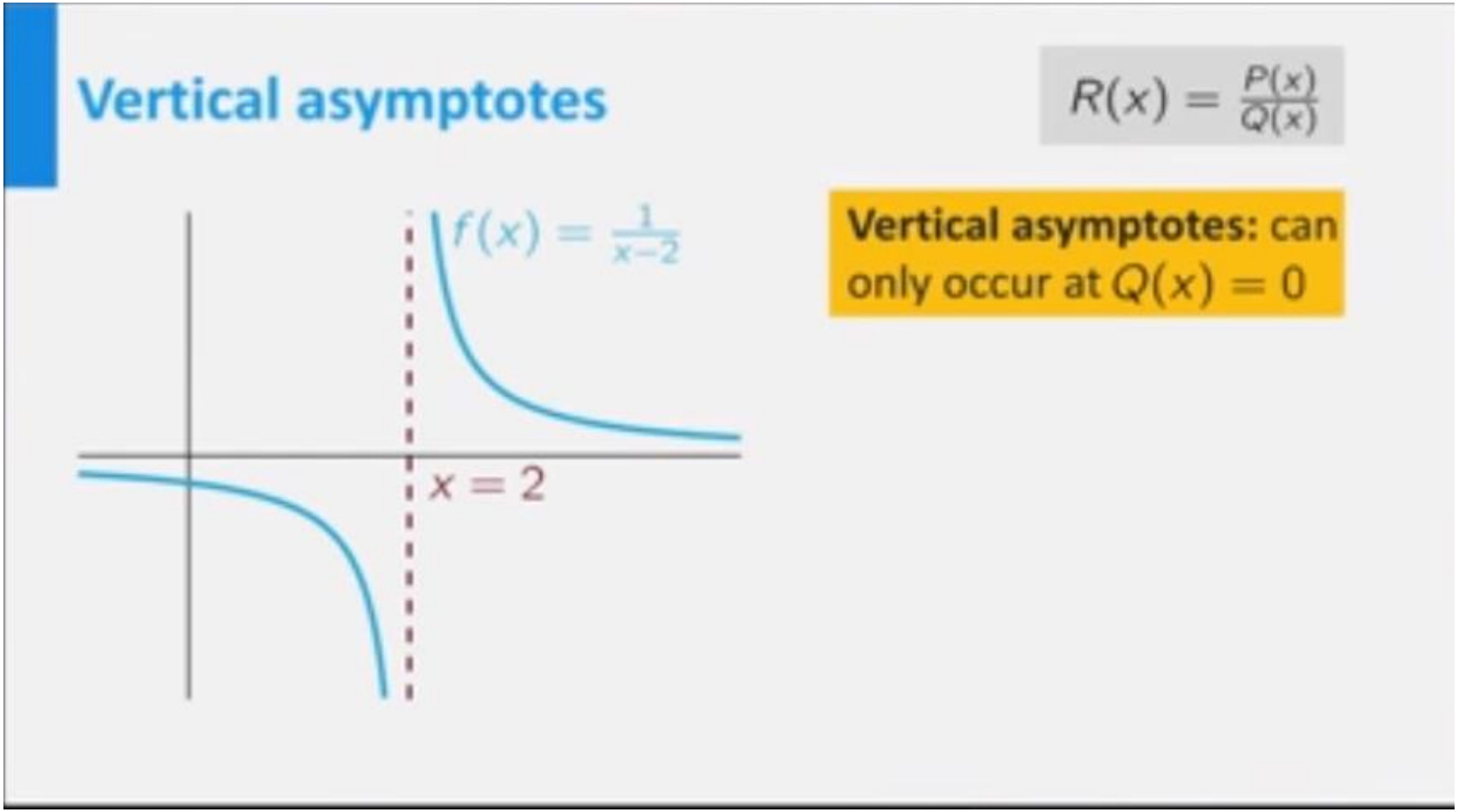


Horizontal asymptote:
if $\deg(P) \leq \deg(Q)$

Determine location by dividing by $x^{\deg(Q)}$

$$\frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2 + 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \approx \frac{2}{1} = 2$$

For large x



Ver a explicação dada em:
http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap121s3.html

Ver a explicação dada em:
http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap121s3.html

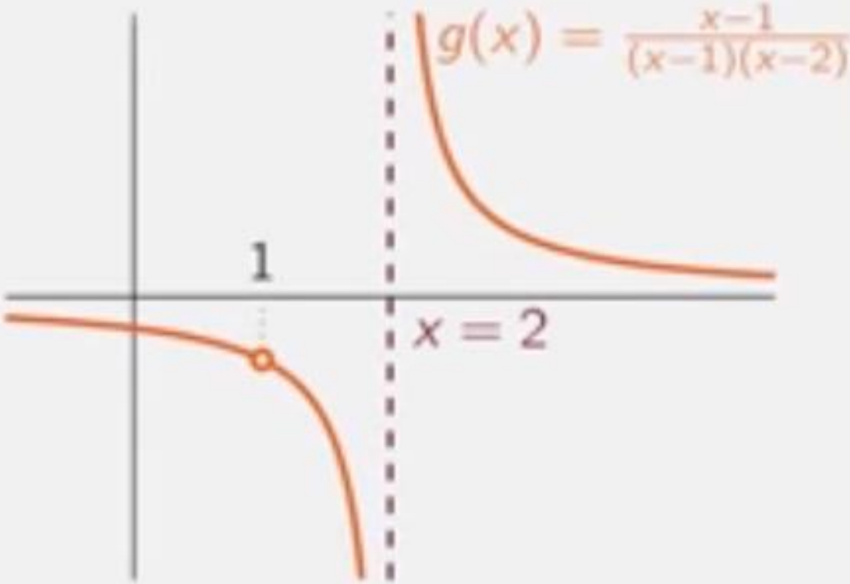
Uma função racional $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ tem uma descontinuidade em $x = a$, se $D(a) = 0$.

Esta descontinuidade é do tipo infinito, dando origem a uma assíntota vertical, se $N(a) \neq 0$.

Se $N(a) = 0$, a fração pode ser simplificada. Se na sua forma irredutível $D(a) \neq 0$, a descontinuidade é do tipo removível e o gráfico da função não apresenta assíntotas verticais neste ponto.

Vertical asymptotes

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$



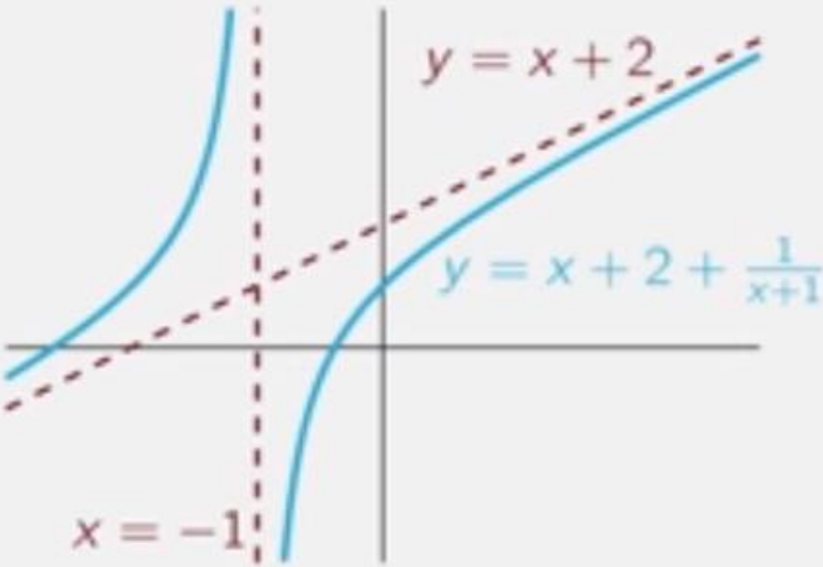
Vertical asymptotes: can only occur at $Q(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$g(x) = f(x) \text{ for } x \neq 1$$

Oblique asymptotes

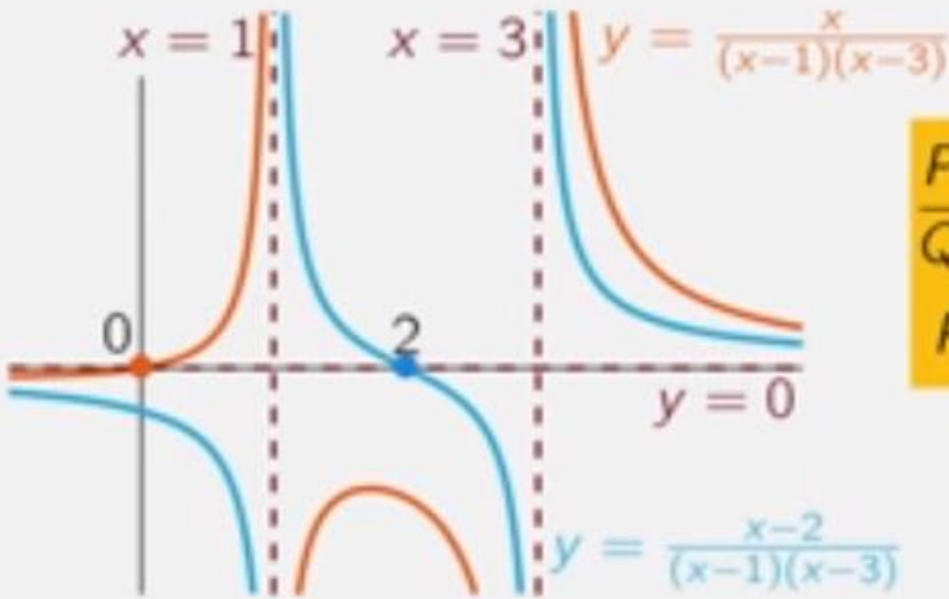


$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) - (x+2) = \frac{1}{x+1} \approx 0$$

For large x

Zeros of rational functions



$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ whenever}$$

$$P(x) = 0 \text{ and } Q(x) \neq 0$$

Summary

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ for polynomials $P(x), Q(x)$

Domain:	excludes points with $Q(x) = 0$
Add:	put over common denominator
Horizontal asymptote:	if $\deg(P) \leq \deg(Q)$ divide by $x^{\deg(Q)}$
Vertical asymptote:	only at $Q(x) = 0$
Zeros:	whenever $P(x) = 0$ and $Q(x) \neq 0$