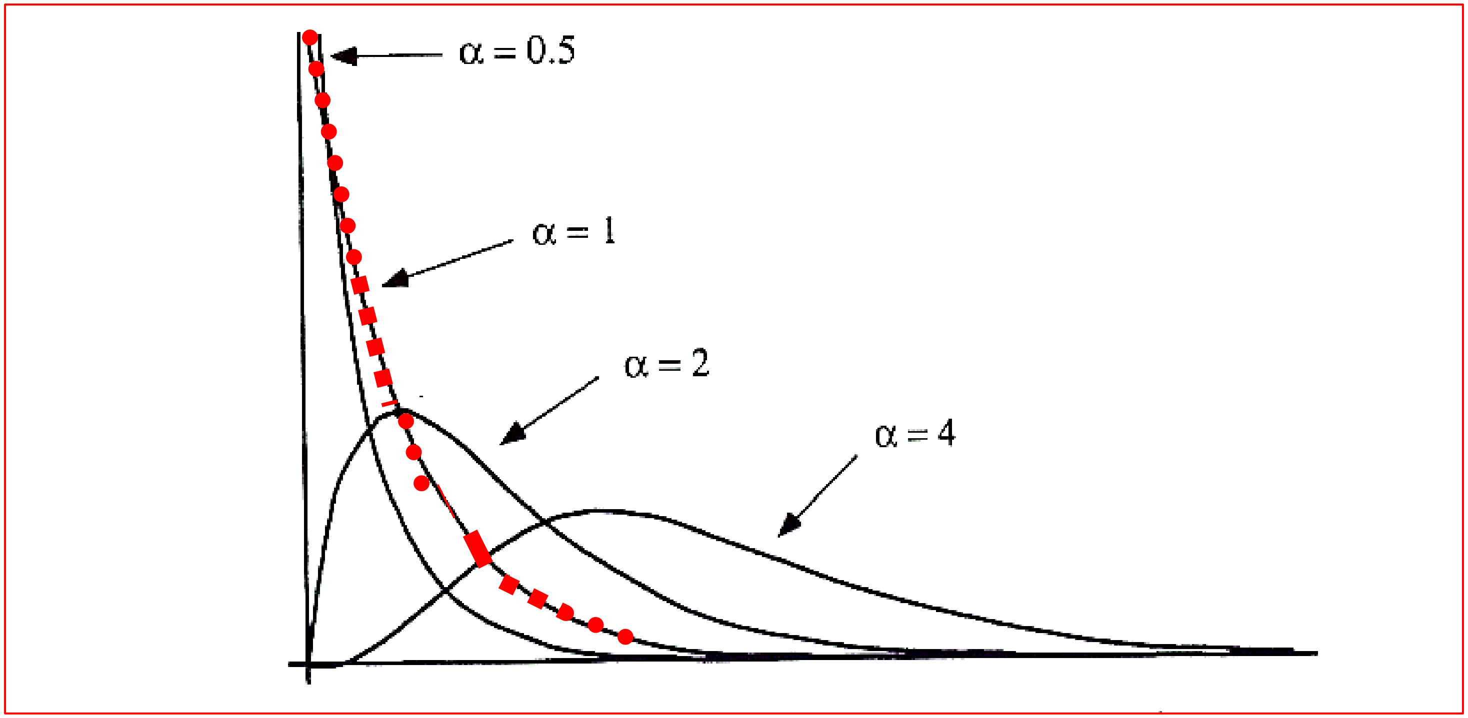
Distribuição Exponencial

- Aplicada a dados com forte assimetria
- Caso especial da distribuição gamma com o parâmetro λ = 1.



Distribuição Exponencial

PDF

$$f(X) = \lambda e^{-X\lambda}$$

CDF

$$F(X) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-X\lambda} = 1 - e^{-X\lambda}$$

Parâmetro $\lambda = \dfrac{1}{\overline{\overline{X}}}$

Ou,

$$F(X) = 1 - e^{-\frac{X}{\overline{\overline{X}}}}$$

- Dessa maneira:

  A esperança e a variância da distribuição exponencial são obtidas através das expressões:

$\overline{X} = 1/\lambda$ e;

$s^2 = \sigma^2 = 1/\lambda^2$,

Exemplo: Chuva em Pelotas

Classes	X Valor Central	f frequencia absoluta
1 – 10	5,5	450
10 – 20	15	184
20 – 30	25	80
30 - 40	35	43
40 – 50	45	23
50 - 60	55	9
60 -70	65	7
70 – 80	75	5
80 – 90	85	2
90 -100	95	2
100 – 110	105	0
110 -120	115	1
Totais	**-**	**806**

Calculando os Parâmetro da f(x)

- Média ou Esperança

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

- Parâmetro λ

$$\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$$

Exemplo: Chuva em Pelotas

Classes	X Valor Central	X	f	f x X
1 - 10	5,5	10	450	2475
10 - 20	15	20	184	2760
20 - 30	25	30	80	2000
30 - 40	35	40	43	1505
40 - 50	45	50	23	1035
50 - 60	55	60	9	495
60 -70	65	70	7	455
70 - 80	75	80	5	375
80 - 90	85	90	2	170
90 -100	95	100	2	190
100 - 110	105	110	0	0
110 -120	115	120	1	115
Totais		-	**806**	**11575**

Σf Xcentral =
5,5x450 + 15x184 +
25x80 + ...

= 11575

Σf = 450 + 184 +
80 + 43 + 23
+ 9 + 7 + ...

= 806

Calculando os Parâmetro da f(x)

- Média ou Esperança

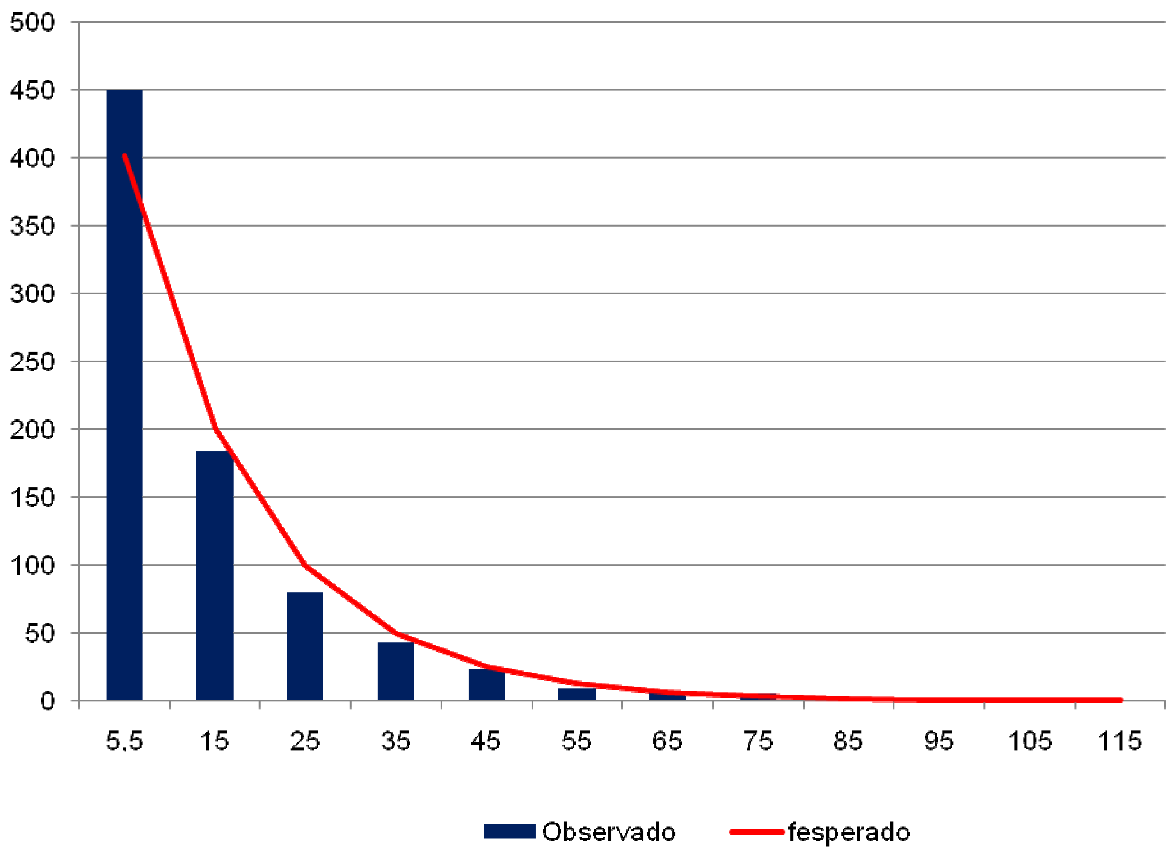
$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{11575}{806} = 14,361$$

- Parâmetro λ

$$\lambda = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{14,361} = 0,0696$$

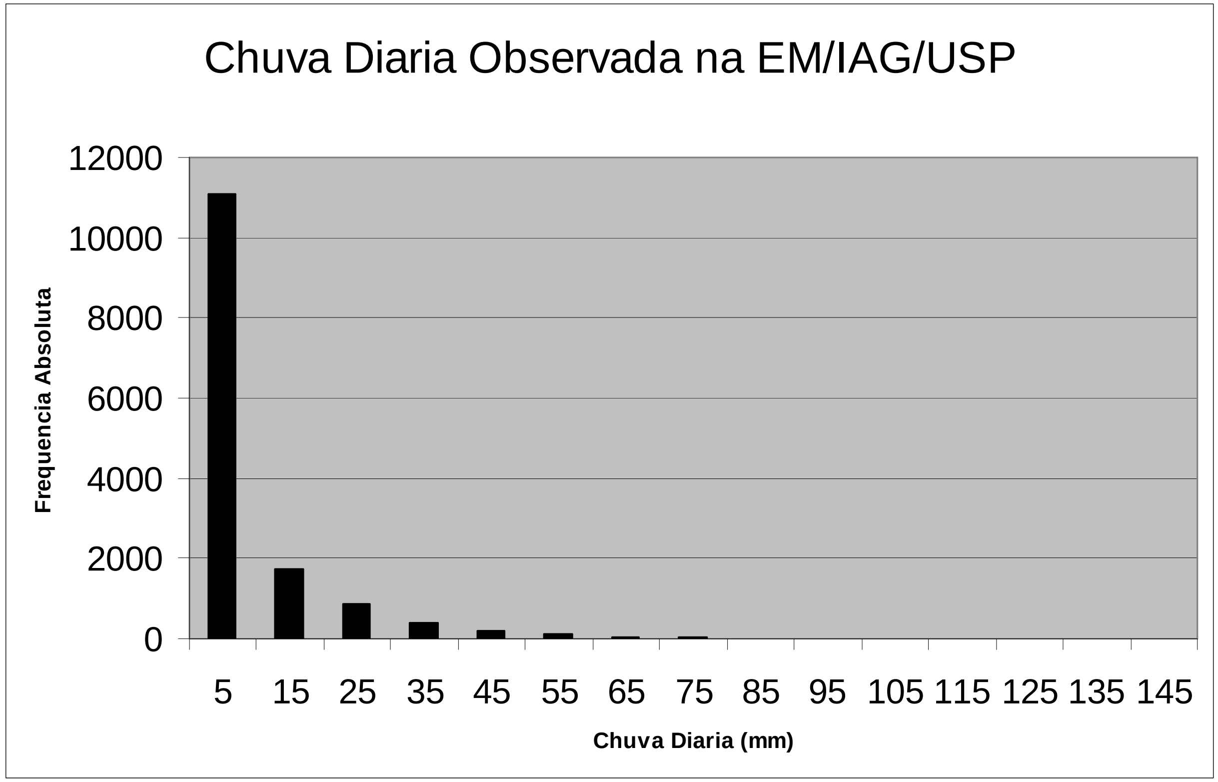
Classes	X	f	$F(X)=1-e^{-X\lambda}$	Valor Esperado $\Sigma f-F(X)*\Sigma f$
1 – 10	10	450	0,5016	402
10 – 20	20	184	0,7516	201
20 – 30	30	80	0,8762	100
30 - 40	40	43	0,9383	50
40 – 50	50	23	0,9692	25
50 - 60	60	9	0,9847	12
60 -70	70	7	0,9924	6
70 – 80	80	5	0,9962	3
80 – 90	90	2	0,9981	2
90 -100	100	2	0,9990	1
100 – 110	110	0	0,9995	0
110 -120	120	1	0,9998	0
Totais	**-**	**806**	**-**	**806**

F(X=10) = 1 – exp(-10 x 0,0696) = 0,5016
F(X=20) = 1 – exp(-20 x 0,0696) = 0,7516.....


500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
5,5
15
25
35
45
55
65
75
85
95
105
115
Observado
fesperado

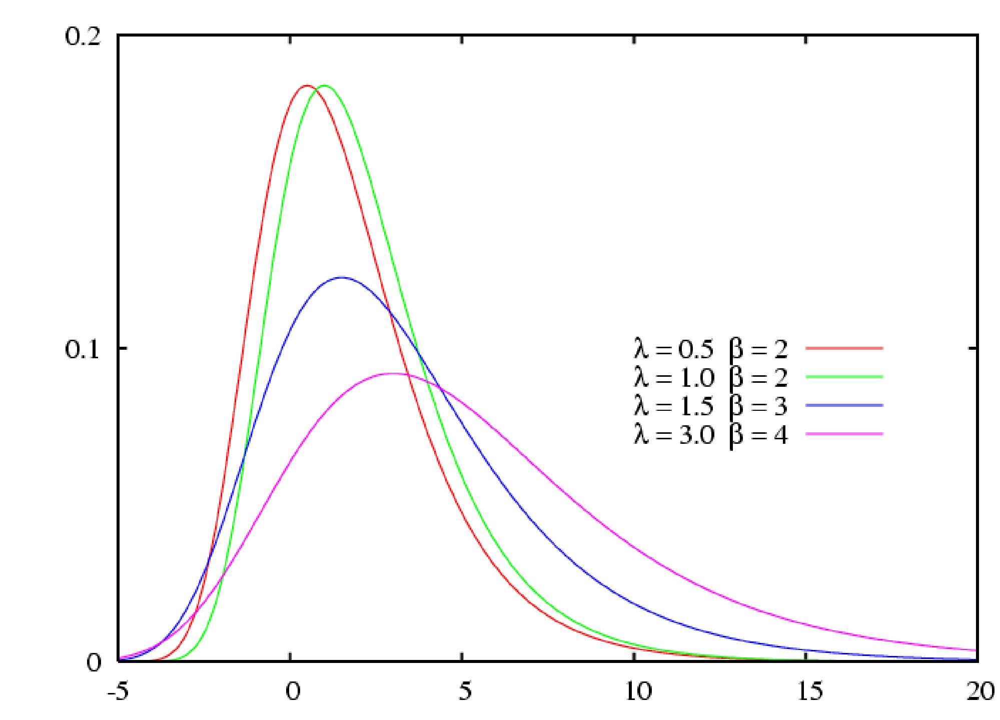
Excercicio:

Bin	*Frequency*
0	0
0.1-10	11105
10-20	1755
20-30	870
30-40	400
40-50	206
50-60	121
60-70	50
70-80	32
80-90	7
90-100	9
100-110	4
110-120	5
120-130	2
130-140	2
140-150	1



Distribuição de valores extremos, Tipo I de Fisher-Tippet ou Gumbel.

- Utilizada para calcular a probabilidade de ocorrência de eventos extremos (chuva, vazão, vento e etc.)



Distribuição de valores extremos

PDF

$$f(X) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}} e^{-e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}}}$$

CDF

$$F(X) = e^{-e^{\pm\frac{X-\alpha}{\beta}}}$$

O duplo sinal no segundo expoente da CDF refere-se aos valores extremos máximo (sinal negativo) e mínimo (sinal positivo)

Os parâmetros α e β podem ser calculados por diversos métodos.

α e β via Método dos Momentos

- As estimativas dos parâmetros β e α com base nos dois primeiros momentos da amostra (média $\overline{X}$ e desvio-padrão - s)

$$\alpha = \overline{X} - 0{,}5772\beta \qquad \beta = \frac{\sqrt{6}}{\pi} s$$

Chuva máxima de 24 horas de Piracicaba, SP, no período de 1917 a 1988

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
191...								65,0	68,0	65,0
192...	64,0	65,0	55,0	64,0	60,0	57,0	66,5	64,0	50,0	59,2
193...	86,5	93,0	69,0	65,0	83,0	50,0	64,4	58,8	58,0	109,5
194...	83,3	77,9	104,9	97,7	111,2	95,3	64,4	75,2	46,8	108,4
195...	55,5	62,4	73,9	54,4	57,8	80,1	39,9	59,1	80,0	78,4
196...	83,8	55,5	82,9	52,0	48,3	80,4	70,7	49,1	63,0	73,7
197...	71,6	68,5	80,4	99,5	68,6	76,0	72,7	71,8	46,4	63,4
198...	50,7	59,2	68,6	114,0	51,1	70,4	62,0	103,2	86,7	

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{65{,}0 + 68{,}0 + 65{,}0 + \ldots 62{,}3 + 103{,}2 + 86{,}7}{72} = \frac{5120{,}64}{72} = 70{,}7$$

$$s^2 = \frac{\left[\sum (X - \overline{X})^2\right]}{N-1} = 364{,}34 \qquad s = \sqrt{s^2} = 19{,}08$$

$$\beta = \frac{\sqrt{6}}{3{,}14} 19{,}08 = 14{,}87 \qquad \alpha = 70{,}7 - 0{,}5772 \times 14{,}87 = 62{,}11$$

α e β via Método da Regressão

Tomando-se os valores da variável aleatória X, ordenados em forma crescente, faz-se a regressão de n/(N+1) contra F(X), ou seja:

$$F(X) = e^{-e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}}} = \frac{n}{N+1} \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{n}{N+1}\right) = e^{-\frac{X-\alpha}{\beta}}$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{n}{N+1}\right)\right] = -\frac{X-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{X}{\beta}$$

- Assim, se utilizarmos uma equação da forma Y = a + bX, temos que

$$Y = \ln\left[\ln\left(\frac{n}{N+1}\right)\right] \qquad a = \frac{\alpha}{\beta} \qquad b = \frac{1}{\beta}$$

Portanto, os parâmetros a e b podem ser estimados por

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

$$b = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}}$$

Exemplo:

Valores anuais de chuva máxima de 24 horas de Piracicaba, SP, ordenados para estimativa dos parâmetros da distribuição de valores extremos

n	X	n/(N+1)	Ln(*)	n	X	n/(N+1)	Ln(*)
1	39,9	0,0137	1,4564	37	68,5	0,5068	-0,3863
2	46,4	0,0274	1,2802	38	68,6	0,5205	-0,4264
3	46,8	0,0411	1,1606	39	68,6	0,5342	-0,4670
4	48,3	0,0548	1,0661	40	69,0	0,5479	-0,5082
5	49,1	0,0685	0,9862	41	70,4	0,5616	-0,5501
6	50,0	0,0822	0,9158	42	70,7	0,5753	-0,5928
7	50,0	0,0959	0,8521	43	71,6	0,5890	-0,6363
8	50,7	0,1096	0,7935	44	71,8	0,6027	-0,6807
9	51,1	0,1233	0,7387	45	72,7	0,6164	-0,7261
10	52,0	0,1370	0,6871	46	73,7	0,6301	-0,7726
11	54,4	0,1507	0,6379	47	73,9	0,6438	-0,8203
12	55,0	0,1644	0,5909	48	75,2	0,6575	-0,8693
13	55,5	0,1781	0,5455	49	76,0	0,6712	-0,9197
14	55,5	0,1918	0,5016	50	77,9	0,6849	-0,9717
15	57,0	0,2055	0,4589	51	78,4	0,6986	-1,0255
16	57,8	0,2192	0,4173	52	80,0	0,7123	-1,0811
17	58,0	0,2329	0,3765	53	80,1	0,7260	-1,1389
18	58,8	0,2466	0,3365	54	80,4	0,7397	-1,1991
19	59,1	0,2603	0,2972	55	80,4	0,7534	-1,2619
20	59,2	0,2740	0,2583	56	82,9	0,7671	-1,3276
21	60,0	0,2877	0,2199	57	83,0	0,7808	-1,3967
22	62,0	0,3014	0,1818	58	83,3	0,7945	-1,4696
23	62,4	0,3151	0,1441	59	83,8	0,8082	-1,5468
24	63,0	0,3288	0,1065	60	86,5	0,8219	-1,6291
25	63,4	0,3425	0,0691	61	86,7	0,8356	-1,7171
26	64,0	0,3562	0,0319	62	89,2	0,8493	-1,8120
27	64,0	0,3699	-0,0054	63	93,0	0,8630	-1,9151
28	64,0	0,3836	-0,0426	64	95,3	0,8767	-2,0282
29	64,4	0,3973	-0,0799	65	97,7	0,8904	-2,1535
30	64,4	0,4110	-0,1174	66	99,5	0,9041	-2,2946
31	65,0	0,4247	-0,1549	67	103,2	0,9178	-2,4561
32	65,0	0,4384	-0,1927	68	104,9	0,9315	-2,6458
33	65,0	0,4521	-0,2307	69	108,4	0,9452	-2,8761
34	65,0	0,4658	-0,2691	70	109,5	0,9589	-3,1709
35	66,5	0,4795	-0,3077	71	111,2	0,9726	-3,5835
36	68,0	0,4932	-0,3468	72	114,0	0,9863	-4,2836

(*) Ln[n/N+1)

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

$$b = \frac{\sum Xy - \frac{\sum X \sum y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}}$$

$$Y = \ln\left\{\ln\left[\frac{n}{(N+1)}\right]\right\}$$

$$\sum X = 39{,}9 + 46{,}4 + \ldots + 111{,}2 + 114{,}0 = 5120{,}7$$

$$\sum X^2 = 39{,}9^2 + 46{,}4 + \ldots + 111{,}2^2 + 114{,}0^2 = 38255{,}29$$

$$\sum Y = 1{,}4564 + 1{,}2802 + \ldots + -3{,}5835 + -4{,}2836 = -39{,}97$$

$$\sum XY = 39{,}9 \times 1{,}4564 + 46{,}4 \times 1{,}2802 + \ldots + 111{,}2 \times (-3{,}5835) + 114{,}0 \times (-4{,}2836) = -4295{,}91$$

a = 4,3492 e b = -0,06896

$$\beta = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{-0{,}06896} = 14{,}5012$$

$$\alpha = a\beta = 14{,}5012 \times 4{,}3492 = 63{,}0686$$

Lista de Exercício 4
Entrega: 24 de Junho

- 1) A partir da Tabela de Precipitação máxima diária observada na Estação Meteorológica do IAG/USP, calcule os parâmetros alfa e beta da distribuição de valores extremos segundo os seguintes métodos:

    a) momentos

    b) regressão

  Obs. Apresente todos os passos.

- 2) A partir da tabela (ao lado) de frequência de ocorrência de precipitação mensal observada na EM/IAG/USP, ajuste uma distribuição de frequência exponencial e plote os resultados (observação e modelo)

Valor Médio da Classe	*Frequencia Absoluta*
25	128
50	120
75	117
100	96
125	99
150	69
175	55
200	62
225	47
250	39
275	29
300	12
325	10
350	8
375	4
400	5
425	1
450	1
475	1
500	0