Aula 4
Equação do Radar

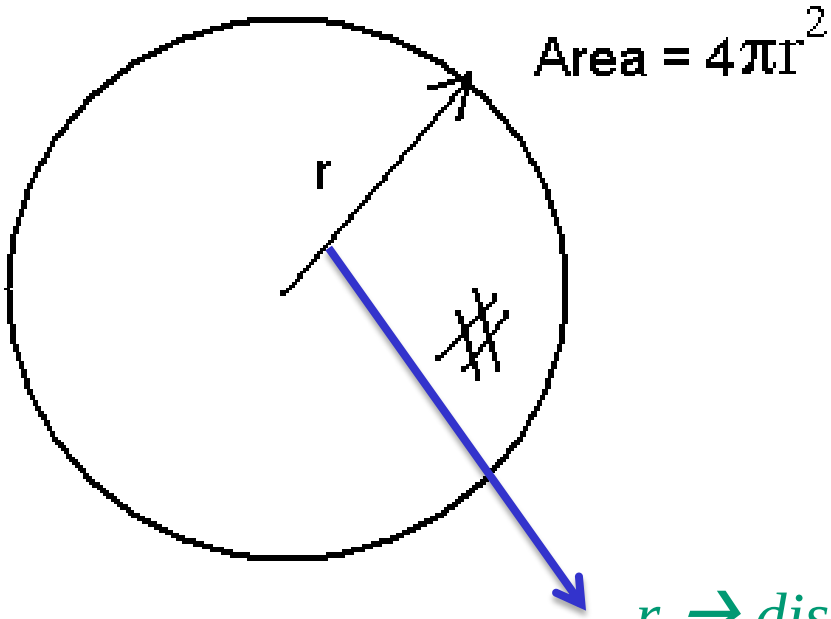
Capítulo 4 - Battan

Hipóteses

- O transmissor (antena) irradia a energia EM de forma isotrópica (todas as direções);
- A energia EM que retorna ao radar é proveniente de partículas esféricas de água ou gelo
- A energia EM será espalhada em todas as direções igualmente

Lembrete: ***Potência é energia por unidade de tempo***

Primeiramente, calculamos o fluxo de EM que é irradiado pelo radar através da densidade de potência transmitida (**S**). No nosso caso, temos que a densidade é a razão entre a Potência Transmitida (**P_T**) pela área da superfície esférica que circunda o radar.

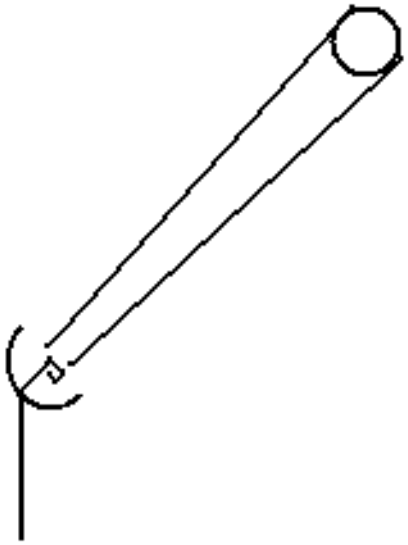


$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2}$$

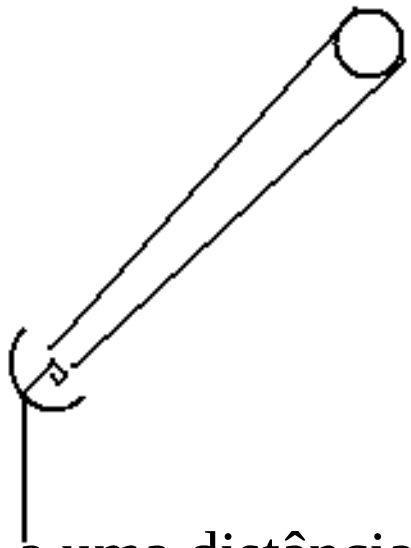
r → distância do radar

Entretanto, temos que as antenas de radar não irradiam energia em todas as direções mas em ângulos sólidos. Em outras palavras, temos a concentração de energia ao longo de um feixe de radiação.

Em geral as antenas utilizadas por radares meteorológicos são parabólicas



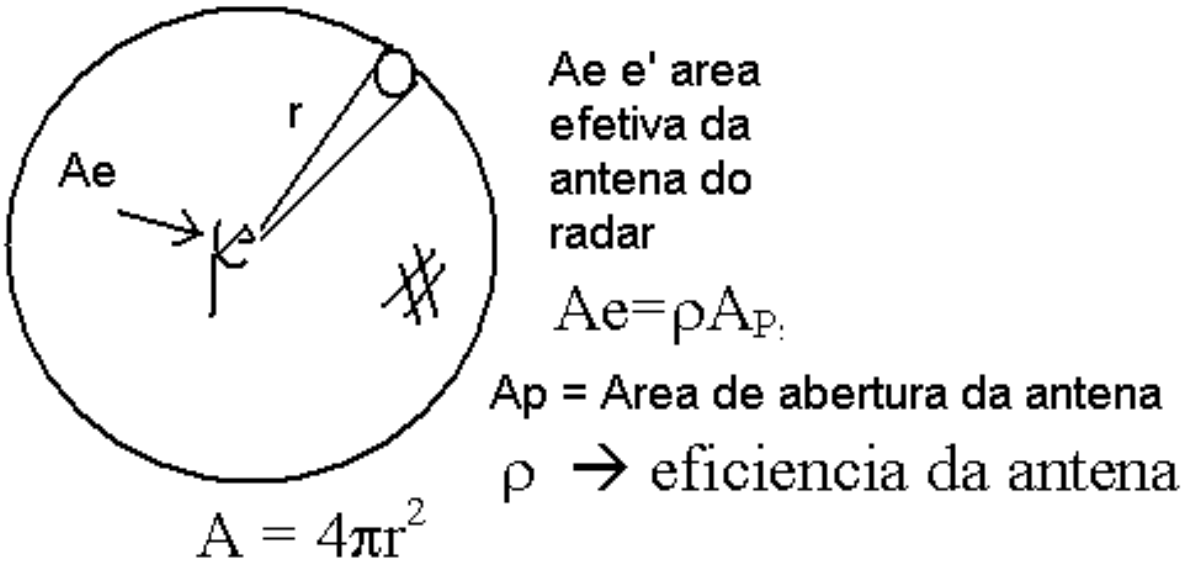
Portanto, podemos definir ***o Ganho da antena*** (G) como sendo a razão entre a potência por unidade de área ao longo do eixo do feixe do radar pela Potência irradiada isotropicamente. (Valores típicos variam entre 20 a 45 dB)



Logo se tivermos um alvo a uma distância r do radar com uma seção transversal A_T, temos que a ***Potência Interceptada*** (P_σ) pode ser expressa como:

$$P_\sigma = \frac{P_T}{4\pi r^2} G A_T$$

Agora assumimos que o alvo não absorve nenhuma potência e re-irradia isotropicamente.



A seção transversal efetiva (**A_e**) da antena receptora é dada por:

$$A_e = \rho A_p$$

Onde **A_p** é a área física da antena e **ρ** é a eficiência da antena.

A partir de considerações teóricas para antenas circulares e parabólicas, temos que a área efetiva, o ganho e a área da antena podem se relecionar da seguinte forma.

$$A_e = \frac{G\lambda^2}{4\pi} \qquad G = \frac{8\pi A_P}{3\lambda^2}$$

Note que para um λ fixo, um refletor grande produz um ganho maior. Também temos que para uma antena fixa, temos um maior ganho quando diminuimos o λ.

Combinando as duas equações temos:

$$A_e = \frac{2}{3} A_P$$

Portanto inserindo as caracteristicas da antena, a ***Potência Recebida*** (**P_R**) pelo radar é dada por:

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G A_T \frac{A_e}{4\pi r^2}$$

Como a área efetiva da antena (A_e) pode ser expressa em função do ganho da antena (G) e do comprimento de onda do radar (λ.).

$$A_e = \frac{G\lambda^2}{4\pi}$$

Temos que a eq. do radar pode ser re-escrita como

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G A_T \frac{A_e}{4\pi r^2} = \frac{P_T}{4\pi r^2} G A_T \frac{G\lambda^2}{4\pi r^2 4\pi} = \frac{P_T G^2 A_T \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4}$$

$$P_R = \frac{P_T G^2 A_T \lambda^2}{64\pi^3 r^4}$$

Anteriormente, havíamos assumido que o alvo tinha uma seção transversal A_T que espalhava isotropicamente.

No entanto não existem alvos meteorológicos que espalham isotropicamente, pois a potência re-irradiada pelo alvo depende de uma relação entre o tamanho da partícula interceptada pela EM e o λ da onda incidente (espalhamento frontal – Mie por exemplo).

Dessa maneira, definimos a ***seção transversal de retro-espalhamento*** (σ) como a seção transversal de um espalhador isotrópico que retornaria a mesma potência para o radar como o alvo atual.

Em geral temos que $\sigma > A_T$

Uma definição alternativa para σ;

A área a qual, quando multiplicada pela Potência Incidente (P_I) dá a potência total irradiada por uma fonte isotrópica que irradia a mesma potência na direção contrária (retro) que um espalhador atual.

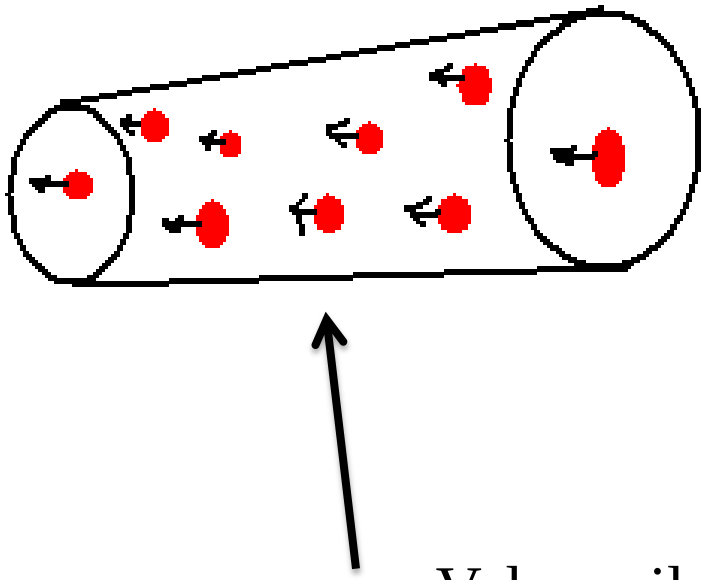
$$\sigma P_I = 4\pi r^2 S = 4\pi r^2 \frac{P_T}{4\pi r^2}$$

Então para um espalhamento simples temos:

$$P_R = \frac{P_T G^2 A_T \lambda^2}{64 \pi^3 r^4} = \frac{P_T G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma_I$$

esta equação pode ser aplicada para alvos isolados como a Lua, Avião e uma gota de chuva.

Porém temos que lembrar que em um feixe do radar, a seção transversal de retro-espalhamento (σ_I) ilumina vários espalhadores (gotas de chuva) ao mesmo tempo, portanto:



$$P_R = \Sigma P_{RI} \sim \Sigma \sigma_I$$

Volume iluminado

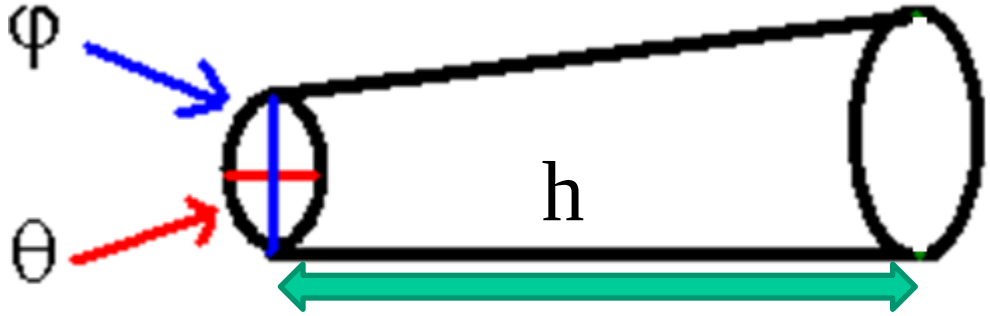
Como as partículas se movimentam (gravidade e correntes ascendentes e descendente), temos que a potência refletida varia. Entretanto após um período da ordem 10^{-2} segundos temos que o espalhamento aleatório destas partículas se torna independente.

Dessa maneira, se fizermos uma média da potência recebida sobre um número grande de alvos, temos que:

$$\overline{P_R} = \frac{P_T G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sum_{t=0}^{n} \sigma_I$$

onde a somatória é sobre o ***volume iluminado*** (V_m) que espalha de volta a energia para o radar.

Se as partículas estão distribuídas uniformemente dentro do Vm descrito por:



$$V_m = \pi \left(\frac{r\theta}{2} \right) \left(\frac{r\varphi}{2} \right) \frac{h}{2}$$

onde r = distância do alvo

θ,φ = largura do feixe da antena (radianos)(1-2 graus)

h = comprimento do pulso em metros (cτ/2)

τ = duração do pulso (tipicamente 1 μs)

Portanto a ***seção transversal total de retro-espalhamento*** é ***o retro-espalhamento por unidade de volume versus Vm.***

$$\overline{P_R} = V_m \frac{P_T G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sum_{t=0}^{n} \sigma_I = \pi \left(\frac{r\theta}{2}\right)\left(\frac{r\varphi}{2}\right) \frac{h}{2} \frac{P_T G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sum_{t=0}^{n} \sigma_I$$

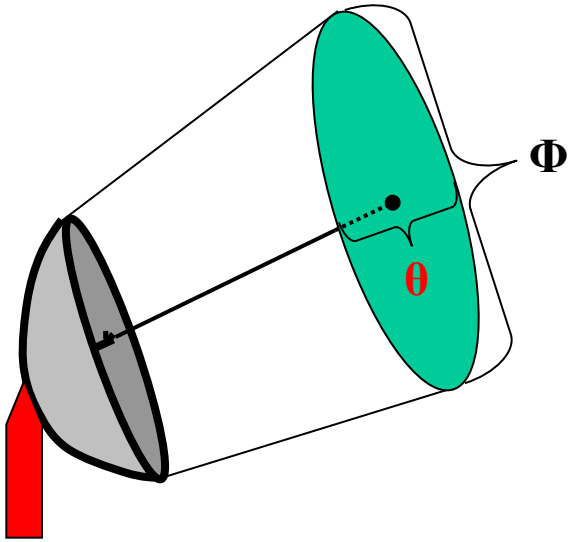
$$\overline{P_R} = \frac{P_T G^2 \lambda^2}{512\ \pi^2 r^2} \theta\varphi\, h \sum_{volume} \sigma_I$$

Neste sentido podemos definir a ***refletividade do radar*** (**η**) como $\eta = \Sigma\sigma_I$, que tem unidades de {cm^2/m^3} ou cm^{-1}.

Por outro lado, quando esta equação do radar foi utilizada sobre alvos conhecidos observou-se grandes desvios . Mais tarde, verificou-se que estas variações se deviam a seção transversal da antena que possui um lóbulo principal.

Esta discrepância foi analisada e explicada por Probert-Jones em 1962. Neste estudo constatou-se que a Potência por unidade de área podia ser representada por um função gaussiana. Dessa maneira, a equação do radar pode ser re-escrita novamente.

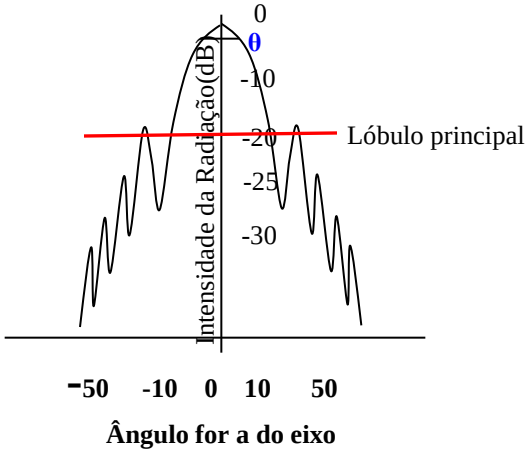
$$\overline{P_R} = \frac{P_T G^2 \lambda^2}{\underbrace{(2 \ln 2)512}_{\textbf{Efeito do lóbulo}} \pi^2 r^2} \theta \varphi h \sum_{volume} \sigma_I$$



A largura do feixe da antena θ, é definida como ½ da potência = 3 dB fora do centro ou 10log2 ou uma largura de 6 dB

A largura do feixe da antena também é função do comprimento de onda e do tamanho da antena D

Padrão do feixe



$$\theta = 1.27\,\lambda / D \quad \textbf{(radianos)}$$

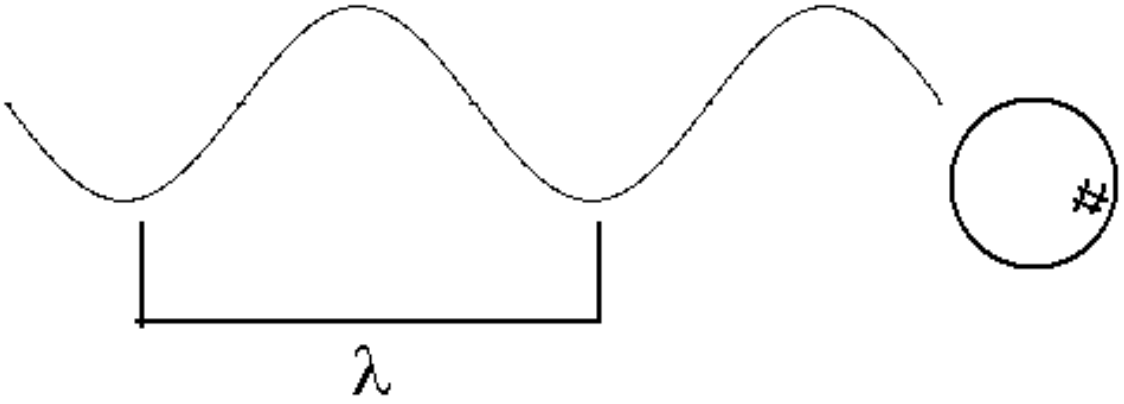
$$\theta = 73\,\lambda / D \quad \textbf{(graus)}$$

onde λ é o comprimento de onda em cm e D o diâmetro da antena em cm.

A seguir temos que analisar como a EM interage com os hidrometeoros

Retro-Espalhamento de pequenas esferas de água e gelo

Quando uma onda plana polarizada passa sobre um gota esférica, esta onda induzirá uma oscilação de dipolo elétrico e magnético na gota.



Sendo que a energia incidente será repartida da seguinte forma:

a) uma fração será absorvida pela gota na forma de calor e a outra

b) será re-irradiada na forma de espalhamento com o mesmo comprimento de onda da energia incidente.

Dipólos

•Dipolos são induzidos como cargas livres e os momentos de dipolo associados com cada molécula ficam alinhados com o campo incidente.

•As cargas do dipolo oscilam na frequência do campo incidente.

•A oscilação destas cargas produz um campo que é espalhado pelo alvo.

Re-escrevendo o espalhamento de uma onda plana a partir da teoria Mie, a seção transversal de retro-espalhamento de uma gota esférica pode ser expressa por:

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{\alpha^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(a_n + b_n) \right|^2$$

onde ***a*** → raio da gota e ***α***=2πa/λ → parâmetro de tamanho

an → coeficiente de espalhamento induzido pelo dipolo, quadrupolo, etc., magnético

bn → coeficiente de espalhamento induzido pelo dipolo, quadrupolo, etc., elétrico.

os valores de a_n e $_{bn}$ podem ser expressos em termos de funções esféricas de Bessel e Hankel como argumentos α e m. Onde m é o índice de refração complexo

$$m = n - ik$$

n → índice de refração

k → coeficiente de absorção

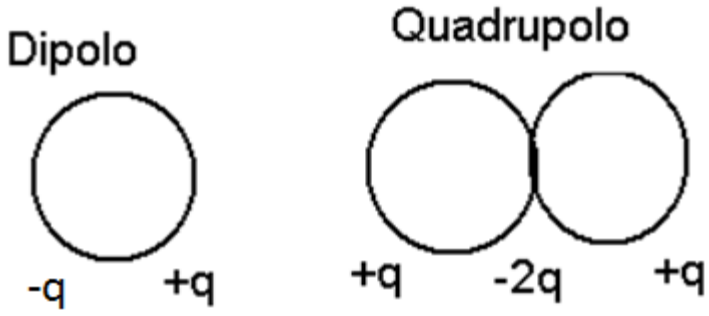
Interpretação Fisica de a_n e b_n

O termo b_n representa o espalhamento de cargas de dipolo que foram induzidos pelo campo incidente. Dipolos, quadrupolos e etc, são resultados da polarização da radiação incidente em materiais dielétricos.

Na região das microondas estes dipolos de carga estão associados com o momento de dipolo permanente da molécula de água.

O termo a_n representa o espalhamento pelo dipólos, quadrupólos (e etc) magnéticos induzidos.

Estes dipólos e quadrupolos podem ser visto como:



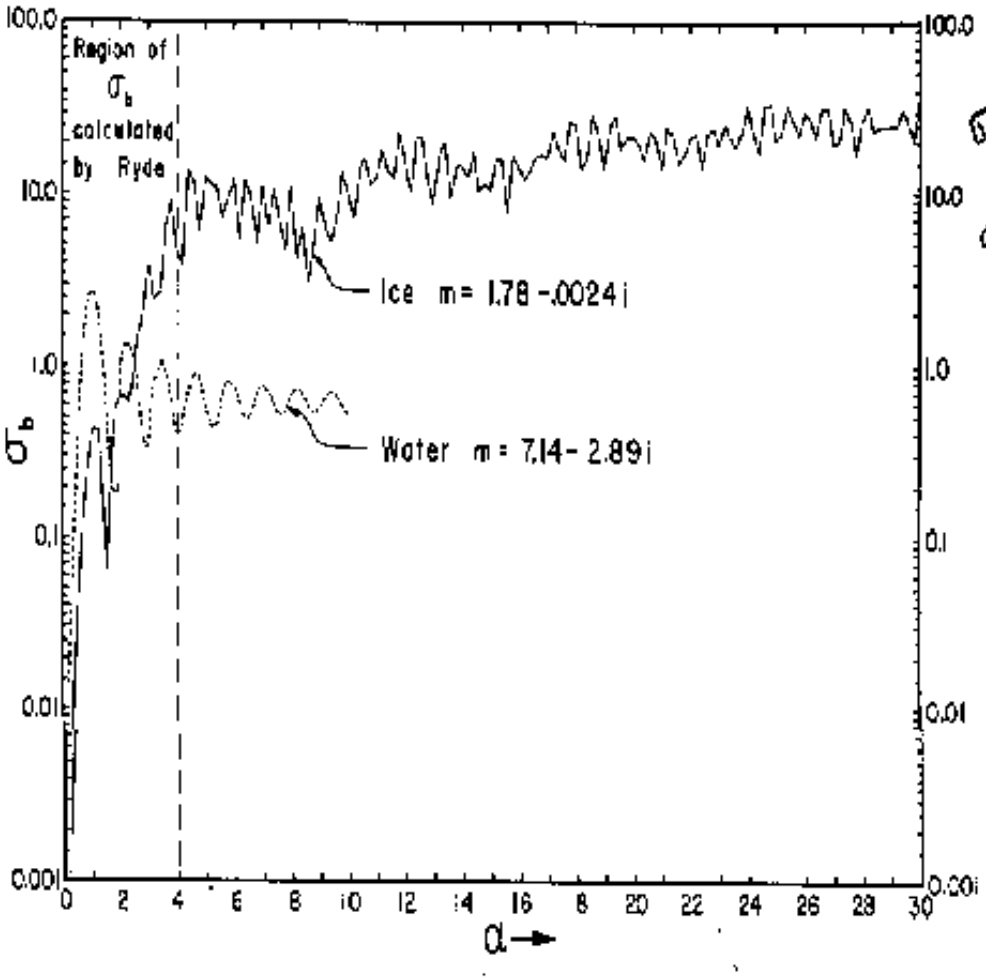


Fig. 4.2. Calculated values of the normalized backscattering cross section ($\sigma_b = \sigma/\pi a^2$) for water and ice spheres. The water curve applies at a temperature of 0°C and a wavelength of 3.21 cm. The ice curve is valid for wavelengths from 1 to 10 cm. From Herman and Battan (1961a).

$\sigma = \pi a^2 \sigma_b$

a = spherical radius

Figura 4.2 ilustra a ***seção transversal de espalhamento normalizada*** ($\sigma/\pi a^2$) para esferas de água e gelo e para um λ=3.21 cm (banda X)

Note que para α muito pequeno σ aumenta com α (entre 1 e 2)

A diferença entre a água e o gelo deve-se a diferença dielétrica, onde:

Água é um espalhador mais eficiente do que o gelo, pois a água cria um dipolo mais alinhado.

Para $\alpha > 2$, σ do gelo é maior que a da água, uma vez que a absorção da água excede a do gelo

O Comportamento de σ para α grande é altamente oscilatório, pois existe um espalhamento grande na direção de propagação da onda que está associado a múltiplas reflexões da onda.

Sendo que para $\alpha << 1$, ou seja, o raio da gota muito menor que λ temos *a aproximação Rayleigh*, logo a seção transversal de espalhamento pode ser descrita por:

$$\sigma_I = \frac{\lambda^2}{\pi}\alpha^6\left|\frac{m^2-1}{m^2+2}\right|^2 = \frac{\pi^5}{\lambda^4}\left|K\right|^2 D_i^6$$

onde Di é o diâmetro da partícula e K o índice de refração da partícula

$$K = \frac{m^2-1}{m^2+2}$$

Água

Termo	T(ºC)		Comprimento	de onda λ	(cm)
		10	**3.21**	**1.24**	**0.62**
	20	0.928	0.9275	0.9193	0.8926
$\|K\|^2$	10	0.9313	0.9282	0.9152	0.8726
	0	0.9340	0.9300	0.9055	0.8312
	-8	.....	.....	0.8902	0.7921
	20	0.00474	0.01883	0.0471	0.0915
Im(-K)	10	0.00688	0.0247	0.0615	0.1142
	0	0.01102	0.0335	0.0807	0.1441
	-8	.....	.....	0.1036	0.1713

$$\sigma_I \approx |K|^2 \quad ????????$$

Gelo

Termo	T(ºC)	
	0	0.197
$\|K\|^2$	-10	0.197
	-20	0.197
	0	9.6×10^{-4}
Im(-K)	-10	3.2×10^{-4}
	-20	2.2×10^{-4}

Agora podemos lembrar que as medidas de precipitação no chão (pluviometros) são expressa em “mm por hora”, ou seja, a acumulação de água por intervalo de tempo.

Dessa maneira podemos expressar σ em função da massa e a respectiva densidade no caso de estarmos medindo partículas com densidades variadas (água ~ 1 g/cm^3 , gelo ~ 0.9 g/cm^3 , neve ~ 0.05 g/cm^3)

Lembrando que assumimos gotículas esféricas, temos que a massa pode ser expressa por:

$$Massa = Volume \bullet densidade = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

Logo a seção transversal de retro-espalhamento pode ser expressa como:

$$\sigma = \frac{36\pi^3}{\lambda^4}\frac{|K|^2}{\rho^2} \bullet Massa^2$$

Transição entre o retro-espalhamento Rayleigh e Mie

A questão é saber qual o valor do parâmetro de tamanho α ($2\pi a/\lambda$) em que a aproximação Rayleigh é valida.

Gunn e East (1954) examinaram esta região a partir do cálculo da razão entre a seção transversal de retro-espalhamento Mie e Rayleigh $\delta=\sigma_{Mie}/\sigma_{Rayleigh}$.

Para esferas de água a 18ºC e λ entre 0.9 à 10 cm temos que a aproximação Rayleigh é válida para $\alpha < 0.22$ ($D < 0{,}07\ \lambda$).

Neste intervalo, σ irá variar mais que 0.75 do valor preciso, o que representa 1.5 dB. ***De todas as maneiras $\sigma_{Rayleigh}$ subestima o valor verdadeiro de σ.***

Para o gelo, entretanto, Ryde (1946), indica que a aproximacao Rayleigh para σ pode ser utilizada para $\alpha < 0.5$ ($D < 0{,}16\ \lambda$).

Usando a aproximação Rayleigh, ou seja, $\alpha < 0.22\ (2\pi a/\lambda)$ temos que o diâmetro máximo observado para o diferentes radares é:

Banda	λ(cm)	Freq(GHz)	< D(mm) observado
S	10,0	3	7
C	5,0	6	3,5
X	3,0	10	2,1
K	1,0	30	0,7
W	0,4	75	0,25

Portando os radares Banda S detectam todos os hidrometeoros exceto as grandes pedras de gelo, porém radares com λ pequeno entram na região de espalhamento Mie, isso implica que estes radares são mais indicados para a medidas de física de nuvens.

A não associação da aproximação Rayleigh se deve ao fato de que existem outras contribuições de espalhamento e absorção da energia EM, ou seja, a seção transversal de retro-espalhamento (σ) é reduzida devido ao aumento do espalhamento na direção de propagação da onda, ou ainda, devido ao aumento do efeito de absorção da partícula.

Finalmente, a Potência recebida pelo retro-espalhamento de partículas esféricas pode ser expressa como:

Espalhamento Rayleigh:

$$\overline{P_R} = \frac{P_T G^2 \theta\varphi h \pi^3}{16 \bullet 64 (\ln 2) \lambda^2} \frac{|K|^2}{r^2} \sum_{volume} D_i^6$$

Espalhamento Mie

$$\overline{P_R} = \frac{P_T G^2 \theta\varphi h \lambda^2}{16 \bullet 64 \bullet \pi^2 (\ln 2)} \frac{1}{r^2} \sum_{volume} \sigma_i$$

onde o Fator Refletividade do Radar Z é $\sum_{volume} D_i^6$

enquanto que a Refletividade do Radar η é $\sum_{volume} \sigma_i$

Logo se soubermos a distribuição das partículas dentro do volume iluminado, podemos expressar Z como:

$$Z = \sum n_i D_i^6$$

ou

$$Z = \int_0^\infty N(D) D^6 dD$$

Sendo assim podemos expressar a Potência recebida pelo radar em termos do Fator Refletividade do Radar e a constante do Radar

$$\overline{P_R} = Cte \bullet \frac{|K|^2}{r^2} Z$$

Caso a aproximação Rayleigh não possa ser aplicada, temos que :

$$\overline{P_R} = Cte \bullet \frac{|K|^2}{r^2} Z_e$$

onde Ze é o fator refletividade equivalente, e pode ser expresso por:

$$Z_e = \frac{\lambda^4 \eta}{\pi^5 |K|^2}$$

Usualmente, os radares meteorológicos assumem que as partículas são água liquida, logo $|K|^2 = 0.93$

Logo:

$$Z_e = \frac{6 \lambda^4 \sigma M}{\pi^6 |K|^2 \rho D^3}$$

Onde M → Conteúdo de água Liquida, ρ → densidade da partícula, D → diâmetro.

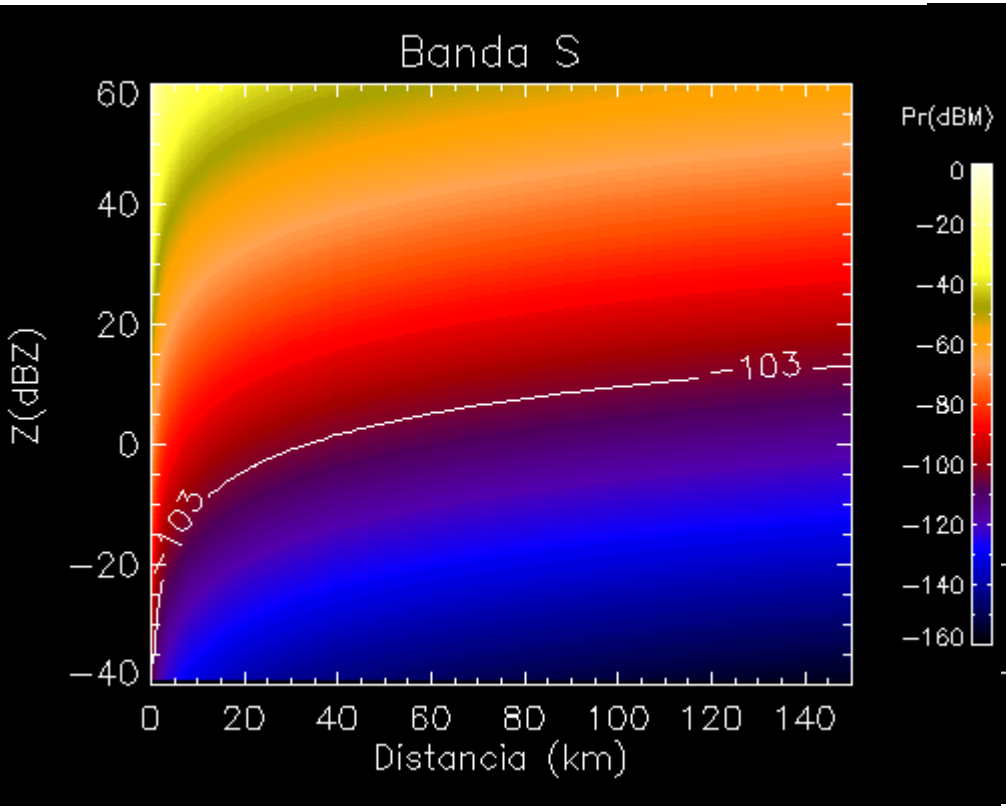
Ze (mm^6/m^3), λ(cm), D(cm), σ(cm^2) e M(g/m^3).

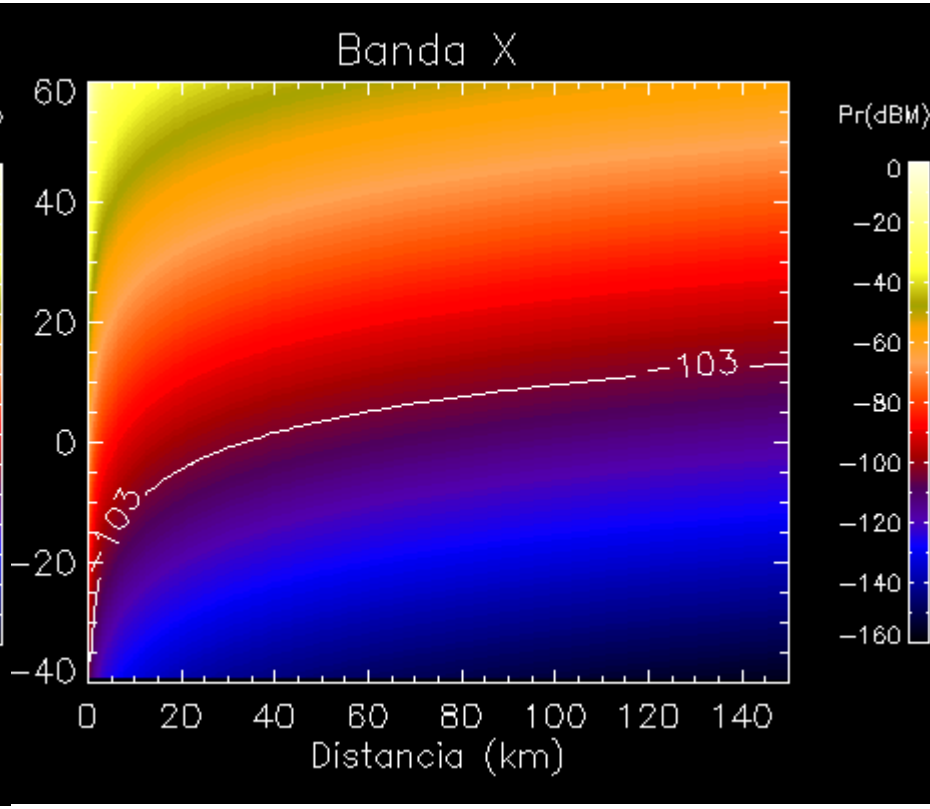
Finalmente podemos expressar a potência do radar recebida em termos mais comuns, ou seja:

$$\overline{P}_R = Cte \bullet \frac{|K|^2}{r^2} Z_e$$

Convertendo para dB ($10Log_{10}$) , temos

$$10\ Log_{10} \overline{P}_R = 10\ Log_{10} Cte + 10\ Log_{10} |K|^2 - 20\ Log_{10} r + 10\ Log_{10} Z_e$$


Banda S
Z(dBZ)
Distancia (km)
Pr(dBM)
-103
-103


Banda X
Distancia (km)
Pr(dBM)
-103
-103

Logo medindo P_R a uma distância r, podemos calcular Ze.

Usualmente usamos Ze em termos de dBZ, que é definido como:

$$dBZ_e = 10Log_{10}Z_e.$$

$$Z_e(dBZ) = \overline{P_R}(dBM) - 10\ Log_{10}\left[Cte \times |K|^2\right] + 20\ Log_{10}\, r$$

Como podemos inferir a Precipitação?

Sabemos que o fator refletividade do radar (Z) é proporcional à distribuição de tamanho de gotas vezes o D^6.

Portanto se houvesse uma maneira de expressar o Conteúdo de Água Líquida (LWC) ou a Taxa de Precipitação (R) em função da distribuição de tamanho de gotas, podemos relacionar estas grandezas com as medidas feitas pelo radar meteorológico.

Temos que a Taxa de Preciptação pode ser expressa como:

$$R(m/h) = \frac{\pi}{6}\int_0^{\infty} N(D)D^3 V_T(D)\,dD$$

E o conteúdo de água líquida pode ser expressa como:

$$LWC\ (g/m^3) = \frac{\pi}{6}\rho_L \int_0^{\infty} N(D)D^3\,dD$$

Logo a partir das relação Z-R ou Z-LWC podemos obter estes parâmetros. Mas para isso temos que ter uma idéia da distribuição de tamanho de gotas, N(D).

Estas medidas de distribuição são feitas em geral a partir de medidas com disdrômetros ou coletores de partículas em aeronaves.

O disdrômetro mede a distribuição de tamanho de gotas (DSD) em um intervalo de tempo a partir do impacto das gotas sobre uma superfície de 50 cm^2. O impacto das gotas provoca uma vibração na membrana, sendo que esta energia mecânica é então proporcional a um tamanho.

Medidas realizadas em 1948 (Marshall e Palmer) indicaram que as precipitações estratiformes seguiam uma distribuição exponencial, enquanto que mais tarde observou-se que as convectivas seguiam uma distribuição gamma e ou lognormal.

De uma maneira simplificada, podemos utilizar a expressão exponencial proposta inicialmente por Marshall e Palmer (1948) e derivar as relações Z-R e Z-LWC.

Para isso assumimos:

$$N(D) = N_0 \exp\{-\Lambda D\}, \; gotas \; / \; cm^3$$

$\Lambda(R) = 4{,}1R^{-0{,}21}$ mm^{-1} $[R(mmh^{-1})]$ e $N_0 = 0{,}08$ cm^{-4}

Logo a Z pode ser expressa por:

$$Z\,[mm^{6}m^{-3}] = \int_{0}^{\infty} N(D)\,D^{6}dD = \int_{0}^{\infty} N_{0}\exp\{-\Lambda D\}D^{6}dD = N_{0}\frac{\Gamma(7)}{\Lambda^{7}} = N_{0}\frac{6!}{\Lambda^{7}}$$

Mashall e Palmer encontraram que Λ=f(R), na forma de $\Lambda(R) = 4{,}1R^{-0{,}21}$

Portanto,

$$Z = N_{0}\frac{6!}{\Lambda^{7}} = N_{0}\frac{6!}{4{,}1^{7}}R^{7\,x\,0{,}21} \approx 213\;R^{1{,}47}\left[\frac{mm^{6}}{m^{3}}\right]$$

Porém na literatura temos que a relação ZR é:

$$Z = 200\;R^{1{,}6}$$

Relação Z-R e Z-M para gotas de água e cristais de gelo e neve.

Tipo	$Z(mm^6/m^3)$ x $M(g/m^3)$	$Z(mm^6/m^3)$ x $R(mm/h)$
Chuva (MP)	$M = 3{,}93x10^{-3}Z^{0{,}55}$	$Z = 200R^{1{,}6}$
São Paulo (Morales, 1991)	$M = 1{,}4\ x10^{-3}Z^{0{,}64}$	$Z = 378R^{1{,}34}$
Neve e agregados	$M = 1{,}7x10^{-2}Z^{0{,}45}$	$Z = 150R^{1{,}54}$
Granizo (molhado)	$M = 9{,}5x10^{-7}Z^{1{,}02}$	$Z = 486R^{1{,}37}$
Granizo (seco)	$M = 5{,}5x10^{-6}Z^{0{,}97}$	
Nuvem	$M = 4{,}56Z^{0{,}5}$	$Z = 69R^{1{,}8}$

Obs: para mais relações utilizar:

1) Sauvageot, H., and J. Omar, 1987: Radar Reflectivity of Cumulus Clouds. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, **4**, 264–272, e
2) Battan L.J., 1973: Radar Observation of the Atmosphere.
3) Morales, C.A.R., 1991: Distribuição de tamanho de gotas nos trópicos: Ajuste de uma função gama e suas aplicações. Dissertação de Mestrado, IAG, USP.

Lista de Exercício 2

Entrega: 25 de Setembro de 2011

1) Utilizando a relação
$M[g/m3] = 1,4 \times 10^{-3} Z[mm6/m3]^{0,64}$

Derive uma função exponencial de distribuição de tamanho de gotas do tipo a de Marshall e Palmer que se ajusta a estes parâmetros, ou seja, calcule Λ e N0.

2) Derive as relação Z-R e Z-LWC para uma distribuição exponencial de cristais de gelo que tem os seguintes parâmetros: $\Lambda(R) = 25{,}5R^{-0{,}48}$ (cm^{-1}) e $N0 = 3{,}8 \times 10^{-2}R^{-0{,}87}$ cm^{-4}

3) Utilizando a relação Z-R de Marshall e Palmer (1948) e a de Morales (1991) calcule a diferença entre as taxas de precipitação estimada para o Z variando de 0,5,15,20,25,30,40,50,55 e 60 dBZ. Comente os resultados e explique porque das diferenças.

4) Utilizando a equação do radar, mostre como a potência média do radar mudaria se voce estivesse observando cristias de gelo em vez de água, sendo que ambos tem o mesmo o conteúdo de água liquida/gelo, potência transmitida, ganho da antena. Também, faça esta avaliação em função da distância e discuta os resultados.