

6. Equação de Transferência Radiativa (ETR)

6.1 Lei de Beer

A radiância espectral L_λ associada ao comprimento de onda λ e à orientação de propagação $\Omega' = (\theta', \phi')$ sofre atenuação ou extinção (absorção + espalhamento) ao interagir com um volume elementar de matéria de comprimento ds' situado à posição s' de um certo caminho óptico, conforme Figura 6.1.

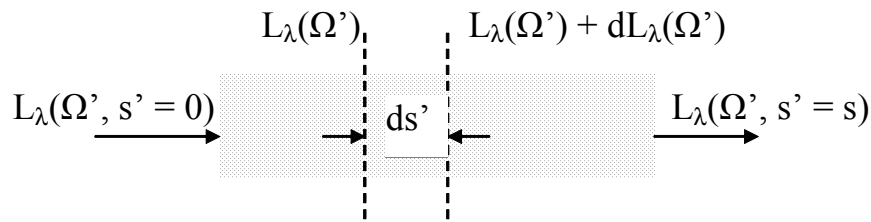


Figura 6.1 – Ilustração esquemática da atenuação sofrida por um feixe de radiação caracterizado pela radiância espectral L_λ ao atravessar um volume de matéria de comprimento ds' .

O elemento diferencial de radiância espectral depende das propriedades ópticas do meio e da radiância incidente e é obtido como:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta(\lambda, s')ds' \quad (6.1)$$

onde $\beta(\lambda, s')$ é o coeficiente linear de extinção à posição s' (e representa as propriedades ópticas do meio atravessado), para o comprimento de onda λ e pode ser interpretado como a taxa de redução de radiância por unidade de caminho óptico, isto é:

$$\beta(\lambda, s') = -\frac{dL_\lambda/L_\lambda}{ds'}$$

A atenuação da radiância entre duas posições $s' = s_1$ e $s' = s_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{L_\lambda(\Omega', s')} &= -\int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s')ds' \\ &= \ln L_\lambda(\Omega', s_2) - \ln L_\lambda(\Omega', s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s')ds' \end{aligned}$$

$$= \ln \left\{ \frac{L_\lambda(\Omega', s_2)}{L_\lambda(\Omega', s_1)} \right\} = - \int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds'$$

$$L_\lambda(\Omega', s_2) = L_\lambda(\Omega', s_1) \exp \left\{ - \int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds' \right\}$$

$$L_\lambda(\Omega', s_2) = L_\lambda(\Omega', s_1) \exp[-\tilde{\tau}(\lambda, s_1, s_2)] \quad (6.2)$$

onde $L_\lambda(\Omega', s_2)$ é a radiância emergente, $L_\lambda(\Omega', s_1)$ é a radiância incidente e

$$\tilde{\tau}(\lambda, s_1, s_2) = \int_{s_1}^s \beta(\lambda, s') ds' \quad (6.3)$$

é a espessura óptica do volume de matéria no comprimento de onda λ entre as posições s_1 e s_2 do caminho óptico.

A equação (6.2) representa a lei de atenuação exponencial ou lei de Beer, ou lei de Beer-Lambert-Bouguer. A equação (6.2) descreve como a radiância espectral numa determinada orientação diminui ao atravessar um meio, devido aos processos de absorção e espalhamento. Entretanto, outros processos também podem ocorrer durante a interação entre radiação e um volume de matéria:

- a) absorção (1);
- b) emissão (2);
- c) espalhamento (Figura 6.2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{remoção (3);} \\ \text{adição (4)} \end{array} \right.$

Portanto, $dL_\lambda(\Omega', s') = \sum_{i=1}^4 dL_\lambda^{(i)}(\Omega', s')$

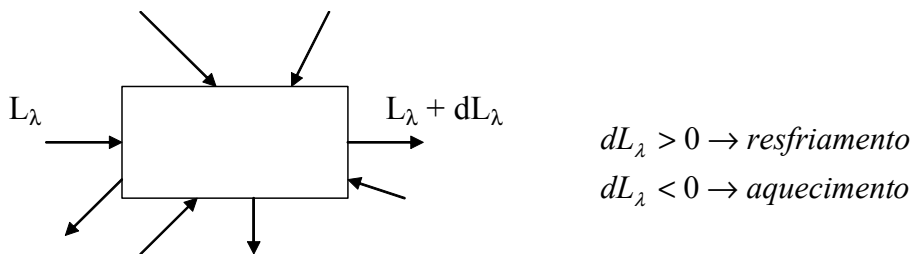


Figura 6.2 – Ilustração esquemática da remoção ou adição de radiância espectral por espalhamento. A radiação pode ser desviada para a orientação de observação a partir de radiância disponível em outras orientações e vice-versa.

$$\begin{aligned}
 dL_{\lambda}(\Omega', s')^{(i)} &= - dL_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \text{absorção} \\
 &+ dL_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \text{emissão} \\
 &- dL_{\lambda}^{(3)} \rightarrow \text{remoção por espalhamento} \\
 &+ dL_{\lambda}^{(4)} \rightarrow \text{adição por espalhamento (necessário existir "outras fontes")}
 \end{aligned}$$

A equação que considera a ocorrência de todos os processos de interação entre a radiação eletromagnética e um volume de matéria é denominada Equação de Transferência Radiativa (ETR) e descreve como a radiância espectral se propaga nesse volume de matéria. Nos próximos tópicos a ETR será deduzida matematicamente inicialmente na ausência de espalhamento, em seguida na ausência dos efeitos de absorção e emissão e finalmente, na presença de todos esses processos, onde será obtida a equação geral da transferência radiativa.

6.2 Forma diferencial da ETR na ausência de espalhamento - Equação de Schwarzschild

A primeira forma particular da ETR considera apenas os processos de absorção e emissão de radiação em um determinado comprimento de onda. Os efeitos de espalhamento são considerados desprezíveis. É uma boa aproximação no estudo da propagação de radiação terrestre na atmosfera. A radiância espectral que atravessa o volume de matéria pode sofrer variações elementares por:

a) atenuação parcial da radiância incidente no volume de matéria por absorção. Dessa forma, a quantidade de radiância absorvida é obtida como:

$$dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega', s') = L_{\lambda}(\Omega', s') \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.4)$$

Portanto, em analogia à equação (1.15), a absorptância espectral é dada por:

$$a(\lambda, s') = \frac{dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega', s')}{L_{\lambda}(\Omega', s')} = \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.5)$$

b) emissão à temperatura em que se encontra o volume de matéria:

$$dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega', s') = \varepsilon(\lambda, s') B_{\lambda}[\lambda, T(s')] \quad (6.6)$$

$$\varepsilon(\lambda, s') = \frac{dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega', s')}{B_{\lambda}[\lambda, T(s')]} \quad (6.7)$$

Mas, da Lei de Kirchhoff: $a(\lambda, s') = \varepsilon(\lambda, s')$

portanto, $dL_\lambda^{(2)}(\Omega', s') = \varepsilon(\lambda, s') B_\lambda[\lambda, T(s')]$

$$= B_\lambda[\lambda, T(s')] \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.6')$$

Considerando a ocorrência simultânea de ambos os processos:

$$-dL_\lambda^{(1)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(2)}(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s') \beta_a(\lambda, s') ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')] \beta_a(\lambda, s') ds'$$

Portanto,

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta_a(\lambda, s') ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + B_\lambda[\lambda, T(s')] \quad (6.8)$$

Essa é a forma diferencial da ETR na ausência de espalhamento ou equação de Schwarzschild. Assim, a radiância pode diminuir ou aumentar após interagir com o volume de matéria, conforme a importância relativa dos processos de emissão e de absorção.

6.3 Forma diferencial da ETR na ausência de absorção/emissão

A segunda forma particular da ETR considera apenas os processos de espalhamento. É uma boa aproximação em regiões espectrais nas quais os processos de absorção e emissão são nulos ou podem ser considerados desprezíveis, por exemplo, na região do espectro solar compreendida entre 0,35 e 0,40 μ m. Neste caso, o elemento diferencial de radiância depende apenas de dois termos:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s') \quad (6.9)$$

onde $dL_\lambda^{(3)} \rightarrow$ espalhamento de uma parte da radiância incidente segundo Ω' para outras direções (ou “para fora”).

$dL_\lambda^{(4)} \rightarrow$ espalhamento de radiância proveniente de outras orientações do espaço para Ω' , efeito resultante da ocorrência de espalhamento múltiplo, isto é, um mesmo fóton pode sofrer mais de um processo de espalhamento ao atravessar um volume de matéria. A probabilidade de ocorrência de mais de um evento de espalhamento aumenta com o aumento da profundidade óptica ou da concentração das partículas espalhadoras (vide Figuras 6.3 e 6.4).

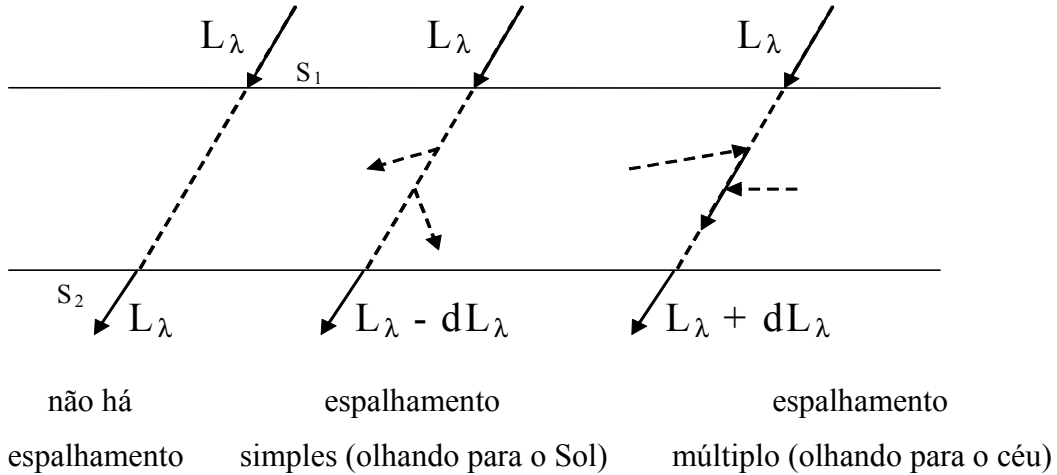


Figura 6.3 – Redução ou adição da radiância espectral por espalhamento ao atravessar um caminho óptico em um volume de matéria.

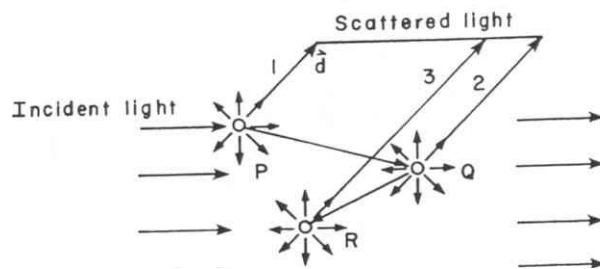


Figura 6.4 – Espalhamento múltiplo (extraído de Liou, 1980).

Voltando à equação (6.9), há duas possíveis variações elementares de radiância:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s')$$

a) Atenuação parcial da radiância incidente por espalhamento:

$$dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') = L_\lambda(\Omega', s') \beta_e(\lambda, s') ds'$$

b) Produção de radiância difusa pelos constituintes do volume de matéria na orientação de interesse:

$$dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s') = J_\lambda(\Omega', s') \beta_e(\lambda, s') ds'$$

onde

$$J_\lambda(\Omega', s') = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\Omega'', s') p(\lambda, s', \Omega'', \Omega') d\Omega'' \quad (6.10)$$

$J_\lambda(\Omega', s')$ é a função fonte por espalhamento

$L_\lambda(\Omega'', s')$ é a radiância disponível para espalhamento proveniente de outras direções Ω''
 $p(\lambda, s', \Omega'', \Omega')$ é a função de fase

Portanto,

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' \quad (6.11)$$

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta_e(\lambda, s')ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + J_\lambda(\Omega', s') \quad (6.12)$$

Assim, a radiância associada ao feixe pode aumentar ou diminuir após interagir com o volume de matéria, conforme a importância relativa dos processos de atenuação por espalhamento e de produção de radiância difusa.

6.4 Equação geral de transferência radiativa

Considerando a ocorrência de todos os processos (absorção, emissão e espalhamento):

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta_a(\lambda, s')ds' - L_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')]\beta_a(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' \quad (6.13)$$

mas, $\beta(\lambda, s') = \beta_a(\lambda, s') + \beta_e(\lambda, s')$ e $\omega_0(\lambda, s') = \frac{\beta_e(\lambda, s')}{\beta(\lambda, s')}$ (equação 5.26)

e, portanto,

$$\beta_e(\lambda, s') = \omega_0(\lambda, s')\beta(\lambda, s')$$

$$\beta_a(\lambda, s') = [1 - \omega_0(\lambda, s')]\beta(\lambda, s')$$

Substituindo em (6.13):

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta(\lambda, s')ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')][1 - \omega_0(\lambda, s')]\beta(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\omega_0(\lambda, s')\beta(\lambda, s')ds'$$

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta(\lambda, s')ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + [1 - \omega_0(\lambda, s')]B_\lambda[\lambda, T(s')] + \omega_0(\lambda, s')J_\lambda(\Omega', s') \quad (6.14)$$

Essa é a forma diferencial da equação geral de transferência radiativa. Vale lembrar que:

$$\omega_0 = 1 \Rightarrow \beta_a = 0 \quad \text{e} \quad \omega_0 = 0 \Rightarrow \beta_s = 0$$

6.5 Aproximação atmosfera plano-paralela

Uma vez que a espessura geométrica “ópticamente ativa” da atmosfera (com aproximadamente 100 km de altura) é muito menor que o raio da Terra torna-se possível considerar a atmosfera como um conjunto de camadas verticalmente estruturadas e horizontalmente homogêneas. Esta hipótese é aceitável para a maior parte das aplicações meteorológicas e climatológicas em escala regional, sempre que as variações verticais (T, P, N, β) forem muito mais importantes que as respectivas variações horizontais. Sob tais condições:

- Orientações de propagação Ω' são descritas em termos de coordenadas locais horizontais ($\pm\mu', \varphi'$) onde $\mu' = \cos(\zeta')$, ζ' é o ângulo zenital. Os sinais “+” e “-” indicam convenção de sinais para feixes ascendentes e descendentes, respectivamente, e φ' é o ângulo azimutal, contado a partir do norte geográfico, para leste.
- Posições s' do caminho óptico são descritas por valores de altitude z' , contada a partir do nível do mar.
- Variações elementares ds' são descritas por variações elementares de altitude dz' , considerando-se o sentido de propagação do feixe em questão, isto é, $ds' = \pm dz'/\mu'$ (Figura 6.5)

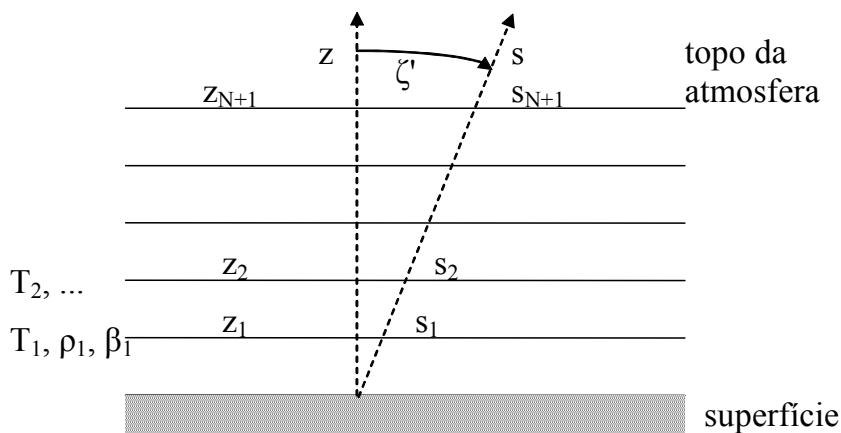
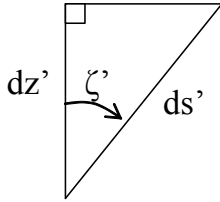


Figura 6.5 – Atmosfera plano-paralela, caracterizada por camadas estruturadas verticalmente e homogêneas horizontalmente.

Portanto, a atmosfera plano-paralela consiste de um determinado número de camadas atmosféricas, cada camada caracterizada por propriedades homogêneas e delimitada por planos infinitos no topo e na base (chamadas bordas ou limites). Obviamente, em geral, o topo coincide com o topo da atmosfera e a base ou o limite inferior é a superfície.



$$\text{Da figura 6.6, } ds' = \frac{dz'}{\cos \zeta'} \quad (6.15)$$

Figura 6.6 – Relação entre dz' e ds'

A partir desse sistema de coordenadas, o ângulo de espalhamento pode ser escrito como:

$$\cos \Theta = \mu' \mu'' + (1 - \mu'^2)^{1/2} (1 - \mu''^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi'') \quad (6.16)$$

lembrando que: $\text{sen } \zeta' = (1 - \cos^2 \zeta')^{1/2}$

Substituindo $\Omega' = (\pm \mu', \varphi')$ e $ds' = \pm \frac{dz'}{\mu'}$ na forma geral da ETR e lembrando que

$$\beta(\lambda, s') = \beta(\lambda, z'):$$

$$\pm \frac{\mu' dL_\lambda(z', \mu', \varphi')}{\beta(\lambda, z') dz'} = -L_\lambda(z', \pm \mu', \varphi') + [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_\lambda[\lambda, T(z')] + \omega_0(\lambda, z') J_\lambda(\lambda, z', \pm \mu', \varphi') \quad (6.17)$$

Da definição de profundidade óptica, tem-se:

$$\frac{d\tau(\lambda, z')}{dz'} = -\beta(\lambda, z') \quad (6.18)$$

Substituindo $\beta(\lambda, z') dz' = -d\tau(\lambda, z')$ na forma geral da ETR:

$$\pm \frac{\mu' dL_\lambda(z', \mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(z', \pm \mu', \varphi') - [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_\lambda[\lambda, T(z')] - \omega_0(\lambda, z') J_\lambda(\lambda, z', \pm \mu', \varphi') \quad (6.19)$$

$$\text{onde, } J_{\lambda}(z', \pm\mu', \varphi') = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 L_{\lambda}(z', \mu'', \varphi'') p(\lambda, z', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \quad (6.20)$$

Finalmente, torna-se mais simples a separação das equações específicas à propagação de radiâncias nos diferentes componentes, de acordo com a orientação:

- Componente ascendente ($\mu' > 0$):

$$\frac{+\mu' dL_{\lambda}(z', \mu', \varphi')}{d\tau} = L_{\lambda}(z', \mu', \varphi') - [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_{\lambda}[\lambda, T(z')] - \omega_0(\lambda, z') J_{\lambda}(z', \mu', \varphi') \quad (6.21)$$

multiplicando todos os termos por $\frac{d\tau}{\mu'} e^{-\tau/\mu'}$ e, por enquanto omitindo os índices para simplificar:

$$dL e^{-\tau/\mu'} = \frac{L}{\mu'} e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{[1 - \omega_0]}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \quad (6.22)$$

mas, dada a função $F(A, B) = \mp A \exp(\pm B)$, tem-se que o diferencial da função é expresso como:

$$dF = d[\mp A \exp(\pm B)] = \mp \exp(\pm B) dA \pm A \exp(\pm B) dB \quad (6.23)$$

de forma que, voltando à equação (6.22) e aplicando a fórmula de derivação (6.23):

$$\begin{aligned} d\left[L e^{-\tau/\mu'} \right] &= dL \times e^{-\tau/\mu'} - \frac{d\tau}{\mu'} L e^{-\tau/\mu'} \\ \Rightarrow d\left[L e^{-\tau/\mu'} \right] &= -\frac{[1 - \omega_0]}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \end{aligned} \quad (6.24)$$

Portanto, integrando-se ambos os membros de (6.24), desde a superfície até uma altura qualquer da atmosfera caracterizadas por $\tau = \tau_{\text{sup}}$ e $\tau = \tau'$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} d\left[L e^{-\tau/\mu'} \right] &= \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \left[-\frac{(1 - \omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} \right] d\tau \\ L e^{-\tau/\mu'} \Big|_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} &= \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} -\frac{(1 - \omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \end{aligned}$$

$$L(\tau') e^{-\tau'/\mu'} - L(\tau_{\text{sup}}) e^{-\tau_{\text{sup}}/\mu'} = \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{-(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

Isolando $L(\tau')$:

$$L(\tau') = L(\tau_{\text{sup}}) e^{\left(\frac{-\tau_{\text{sup}}+\tau'}{\mu'}\right)} - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau$$

Portanto, re-introduzindo os índices:

$$L_\lambda(\tau', \mu', \varphi) = L_\lambda(\tau_{\text{sup}}, \mu', \varphi') e^{\left(\frac{-\tau_{\text{sup}}-\tau'}{\mu'}\right)} - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{[1-\omega_0(\lambda, \tau')]}{\mu'} B_\lambda[\lambda, T(\tau')] e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{\mu'} J_\lambda(\tau', \mu', \varphi') e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau \quad (6.25)$$

Lembrando sempre que τ_{sup} , τ' e τ também representam grandezas espectrais:

$$\tau_{\text{sup}} = \tau_{\text{sup}}(\lambda), \quad \tau' = \tau'(\lambda) \quad e \quad \tau = \tau(\lambda)$$

- Componente descendente ($\mu' < 0$):

$$\left(-\mu' \frac{dL}{d\tau} = L - (1-\omega_0)B - \omega_0 J \right) \times \left(\frac{-e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau \right)$$

$$dL \times e^{\tau/\mu'} = -L \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau + (1-\omega_0) B \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau + \omega_0 J \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau$$

Da fórmula de derivação (6.23), tem-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left[L e^{\tau/\mu'} \right] = \frac{dL}{d\tau} e^{\tau/\mu'} + \frac{1}{\mu'} e^{\tau/\mu'} L$$

e, portanto:

$$d \left[L \times e^{\tau/\mu'} \right] = \left[(1-\omega_0) B \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} + \omega_0 J \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} \right] d\tau$$

que, integrando-se desde o topo da atmosfera a uma altitude qualquer da atmosfera, caracterizada pela profundidade óptica τ' :

$$\int_0^{\tau'} d \left[L e^{\tau'/\mu'} \right] = \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\tau'/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

$$\Rightarrow L(\tau') e^{\tau'/\mu'} - L(0) = \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\tau'/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

Portanto,

$$L(\tau') = L(0) e^{-\tau'/\mu'} + \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau$$

ou, com os respectivos índices:

$$L_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') = L(0, -\mu', \varphi') e^{-\tau'/\mu'} + \int_0^{\tau'} \frac{[1-\omega_0(\lambda, \tau')]}{\mu'} B_\lambda[\lambda, T(\tau')] e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau$$

$$+ \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{\mu'} J_\lambda(\lambda, \tau', \mu', \varphi') e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau \quad (6.26)$$

6.6 Propagação de radiação solar

Para estudar a propagação de radiação na região do espectro solar, como a temperatura do Sol é muito maior do que a da Terra, o termo da ETR que envolve emissão de radiação é desprezível. Portanto, a ETR pode ser escrita como:

$$\pm \mu' \frac{dL_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') - \omega_0(\lambda, \tau') J_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') \quad (6.27)$$

Separando a radiância nos componentes direto e difuso:

$$L_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') = S_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi_0) + I_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi')$$

$$= S_\lambda(\tau') \delta(\mu' - \mu_0) \delta(\varphi' - \varphi_0) + I_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') \quad (6.28)$$

onde a função $\delta(x)$ é a função Delta de Dirac, cujas propriedades são:

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{para } x \neq x_0$$

$$\delta(x - x_0) = 1 \quad \text{para } x = x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

Com essa decomposição, a função fonte de espalhamento é reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(\tau', \pm\mu', \varphi') &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 L_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_{\lambda}(\tau') \delta(\mu'' - \mu_0) \delta(\varphi'' - \varphi_0) p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{\lambda}(\lambda, \tau', \pm\mu', \varphi') = \frac{S_{\lambda}(\tau')}{4\pi} p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \quad (6.29)$$

onde:

$$p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') = p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi')$$

$$p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) = p(\lambda, \tau', \mu_0, \varphi_0, \pm\mu', \varphi')$$

$$\cos \Theta'' = \mu''\mu' + (1 - \mu''^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi'' - \varphi')$$

$$\cos \Theta_0 = -\mu_0\mu' + (1 - \mu_0^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi_0)$$

Voltando à ETR (6.27) e realizando as substituições:

$$\begin{aligned} \pm\mu' \frac{dI_{\lambda}(\tau', \pm\mu', \varphi')}{d\tau} &= I_{\lambda}(\lambda, \tau', \pm\mu', \varphi') \\ &- \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} S_{\lambda}(\tau') p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{produção de radiância difusa} \\ \text{por espalhamento simples de} \\ \text{radiância solar direta.} \end{array} \right. \\ &- \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') d\mu'' d\varphi'' \left\{ \begin{array}{l} \text{produção de radiância difusa} \\ \text{por espalhamento de radiância} \\ \text{difusa disponível em } \tau' \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Quando $-\mu' = -\mu_0$

$$-\mu_0 \frac{dS_\lambda(\tau')}{d\tau} = S_\lambda(\tau')$$

$$\int_{\tau'}^0 \frac{dS_\lambda(\tau')}{S_\lambda(\tau')} = -\int_{\tau'}^0 \frac{1}{\mu_0} d\tau \Rightarrow \ln S_\lambda \Big|_{\tau'}^0 = -\frac{\tau}{\mu_0} \Big|_{\tau'}^0 \Rightarrow \ln S_{0\lambda} - \ln S_\lambda(\tau') = \frac{\tau'}{\mu_0}$$

$$\ln \left(\frac{S_{0\lambda}}{S_\lambda(\tau')} \right) = \frac{\tau'}{\mu_0} \Rightarrow \frac{S_{0\lambda}}{S_\lambda(\tau')} = e^{\tau'/\mu_0} \Rightarrow S_\lambda(\tau') = S_{0\lambda} e^{-\tau'/\mu_0} \begin{cases} \text{Lei de} \\ \text{Beer} \end{cases} \quad (6.31)$$

Portanto, a radiância direta sofre apenas atenuação pela Lei de Beer.

Uma outra simplificação da solução analítica é obtida para o caso em que a probabilidade de ocorrência de espalhamento múltiplo ou produção de radiância difusa por espalhamento de radiância difusa já disponível for desprezível. Esta situação ocorre em regiões espectrais nas quais os valores da profundidade óptica da atmosfera são muito baixos, por exemplo, no infravermelho próximo, na ausência de nuvens ou partículas de aerossol muito grandes (da moda grossa) e sem absorção gasosa, apenas espalhamento molecular. A solução é obtida como:

- a) Região do almucântar solar, cone formado pela variação do ângulo azimutal na situação em que $-\mu' = -\mu_0$, isto é, o ângulo zenital de observação é igual ao ângulo zenital solar.

$$-\mu_0 \frac{dI_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi')}{d\tau} = I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') - \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} S_\lambda(\tau') p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0)$$

Suprimindo-se os índices para facilitar a resolução e multiplicando-se todos os termos da equação por $\left(-\frac{1}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau \right)$:

$$\left(-\mu_0 \frac{dI}{d\tau} - I = -\frac{\omega_0}{4\pi} S_\lambda p(\cos \Theta_0) \right) \times \left(-\frac{1}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau \right)$$

$$dI \times e^{\tau/\mu_0} + \frac{I}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau = \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

$$d\left(I e^{\tau/\mu_0}\right) = \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

Integrando-se desde o topo da atmosfera a uma altura caracterizada pela profundidade óptica τ' :

$$\int_0^{\tau'} d(I e^{\tau/\mu_0}) = \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

$$I e^{\tau'/\mu_0} \Big|_0^{\tau'} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_0^{\tau'} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} \omega_0 d\tau$$

$$I(\tau') = I(0)e^{-\tau'/\mu_0} + \frac{1}{4\pi\mu_0} e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} \omega_0 d\tau$$

mas, como no topo da atmosfera não há radiância difusa, tem-se $I(0) = 0$. Usando a lei de Beer para S_λ (equação 6.31) e re-introduzindo os índices:

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} \omega_0(\lambda, \tau) p(\lambda, \tau, \cos \Theta_0) d\tau$$

e, finalmente, adotando valores médios na coluna para o albedo simples e a função de fase, $\hat{\omega}_0(\lambda)$ e $\hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0)$, respectivamente, a solução para a radiância difusa descendente na região do almucântar solar é obtida como:

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} \hat{\omega}_0(\lambda) \hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0) e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} d\tau$$

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} \hat{\omega}_0(\lambda) \hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0) \tau' e^{-\tau'/\mu_0} \quad (6.32)$$

b) para $-\mu' \neq -\mu_0$, novamente suprimindo-se os índices:

$$-\mu' \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{\omega_0}{4\pi} S p(\cos \Theta_0)$$

e, resolvendo analogamente obtém-se:

$$I_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu'} e^{-\tau'/\mu'} \int_0^{\tau'} \omega_0(\lambda, \tau') e^{-\tau\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu'}\right)} p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) d\tau \quad (6.33)$$

6.7 Propagação de radiação terrestre

Em geral, a radiação emitida pela superfície e pelos constituintes atmosféricos propaga-se ao longo da atmosfera sem sofrer processos de espalhamento, em particular, na ausência de nuvens e partículas de aerossol da moda grossa (raio $> \sim 10 \mu\text{m}$). Nessas condições, a solução da ETR é obtida pela integração da equação de Schwarzschild:

$$\pm \mu' \frac{dL_\lambda(\tau', \pm \mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\lambda, \tau', \pm \mu', \varphi') - B_\lambda[\lambda, T(\tau')]$$

Resolvendo a equação separadamente para radiâncias ascendentes e descendentes:

a) Radiância ascendente ($\mu' > 0$): a equação de transferência se resume a, omitindo-se os índices:

$$\mu' \frac{dL_\lambda}{d\tau} = L_\lambda - B_\lambda \Rightarrow \mu' \frac{dL_\lambda}{d\tau} - L_\lambda = -B_\lambda$$

Multiplicando ambos os membros por $\left(\frac{1}{\mu'} e^{-\tau/\mu'} d\tau\right)$ e desenvolvendo:

$$d\left(L_\lambda e^{-\tau/\mu'}\right) = -\frac{1}{\mu'} B_\lambda e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

que, integrando-se desde a superfície a uma altura caracterizados pelos valores de profundidade óptica de extinção iguais a τ_s e τ' , respectivamente:

$$L_\lambda(\tau') e^{-\tau'/\mu'} - L_\lambda(\tau_s) e^{-\tau_s/\mu'} = -\int_{\tau_s}^{\tau'} \frac{1}{\mu'} B_\lambda e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

Portanto, a radiância ascendente é dada por:

$$L_\lambda(\tau', +\mu', \varphi') = L_\lambda(\tau_s, +\mu', \varphi') e^{-\tau_s/\mu'} \left\{ \begin{array}{l} \text{transferência parcial da} \\ \text{condição de contorno} \end{array} \right. - \frac{1}{\mu'} \int_{\tau_s}^{\tau'} B_\lambda[\lambda, T(\tau)] e^{-\tau/\mu'} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \text{transferência parcial da} \\ \text{contribuição de cada camada} \end{array} \right. \quad (6.34)$$

b) Radiância descendente ($\mu' < 0$):

$$-\mu' \frac{dL_\lambda(\tau', -\mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') - B_\lambda[\lambda, T(\tau')]$$

Multiplicando por $\left(-\frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau\right)$ e desenvolvendo, tem-se:

$$d\left[L_{\lambda}(\tau') e^{\tau'/\mu'}\right] = \frac{1}{\mu'} B_{\lambda} e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

e, finalmente, integrando-se desde o topo da atmosfera a um nível de altura com profundidade óptica igual a τ' e sabendo-se que no topo a radiância descendente é nula:

$$L_{\lambda}(\tau', -\mu', \varphi') = \frac{1}{\mu'} \int_0^{\tau'} B_{\lambda}[\lambda, T(\tau)] e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau \quad (6.35)$$

Exercício 6.1: Radiância espectral igual a $1,499 \text{ Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$ foi medida com um fotômetro solar no instante em que o ângulo zenital solar valia 30° . A radiância incidente no topo no mesmo comprimento de onda era igual a $2,000 \text{ Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$. Com base nessas informações, determine a profundidade óptica da atmosfera no instante da medição.

Exercício 6.2: Determine o valor da função de fase do espalhamento Rayleigh para as seguintes geometrias e classifique o espalhamento em frontal ou traseiro de acordo com o valor do ângulo de espalhamento resultante:

- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 190^{\circ})$
- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 60^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 10^{\circ})$
- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 120^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 10^{\circ})$

Exercício 6.3: Determine o valor da função de fase para o aerossol com parâmetro de assimetria igual a 0,6 a partir da aproximação de Henyey-Greenstein e as mesmas geometrias do exercício anterior.

Exercício 6.4: Determine a radiância difusa ascendente no topo da atmosfera associada ao espalhamento molecular da radiação solar, no espalhamento traseiro, isto é, para $\Omega' = (+\mu_0, \varphi_0 + 180^{\circ})$ se $\Omega_0 = (-\mu_0, \varphi_0)$; supondo que a superfície absorve toda a radiação incidente nesse comprimento de onda e que o espalhamento múltiplo é desprezível.