Apêndice 1 – Dedução da relação entre o sistema horário e o equatorial

Redesenhando a Figura 3.7, incluindo as retas tangentes aos arcos NP e ND (Figura A.1), tem-se, para o complemento de φ:

$$\tan(\pi/2-\varphi)=\frac{\overline{NX}}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{NX}=\overline{ON}\tan(\pi/2-\varphi) \qquad (A.1)$$

$$\overline{ON}=\overline{OX}\cos(\pi/2-\varphi) \Rightarrow \overline{OX}=\overline{ON}\sec(\pi/2-\varphi) \qquad (A.2)$$

Analogamente, para o complemento de δ_o:

$$\tan(\pi/2-\delta_o)=\frac{\overline{NY}}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{NY}=\overline{ON}\tan(\pi/2-\delta_o) \qquad (A.3)$$

$$\overline{ON}=\overline{OY}\cos(\pi/2-\delta_o) \Rightarrow \overline{OY}=\overline{ON}\sec(\pi/2-\delta_o) \qquad (A.4)$$

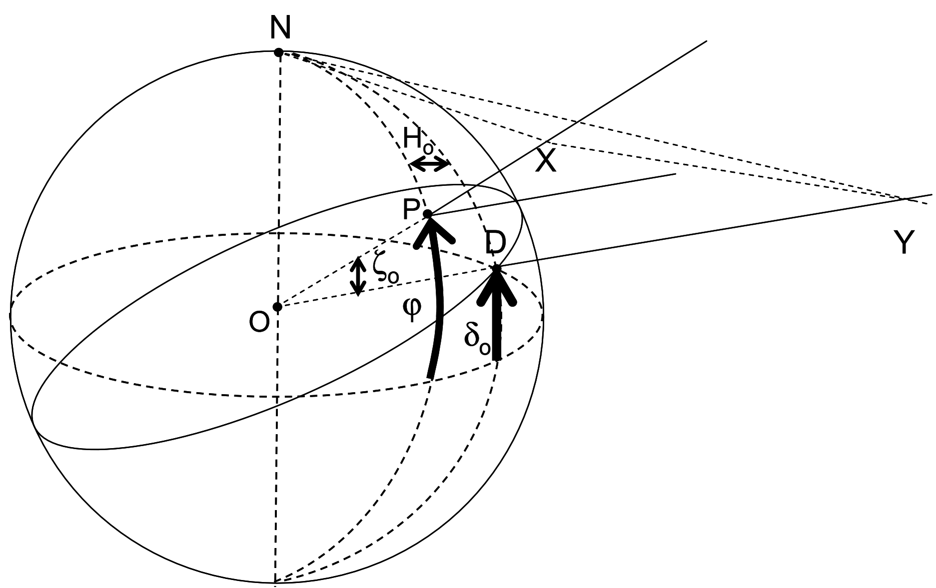

Figura A.1 - Relação entre o ângulo zenital solar ζ_o e a latitude φ, a declinação δ_o e o ângulo horário H_o., com a inclusão das retas tangentes aos arcos NP (reta NX) e ND (reta NY).

Do triângulo NXY:

$$\overline{XY}^2 = \overline{NX}^2 + \overline{NY}^2 - 2\overline{NX}\,\overline{NY}\cos(XNY)$$

mas o ângulo referente ao arco XNY é H_o, portanto:

$$\overline{XY}^2 = \overline{NX}^2 + \overline{NY}^2 - 2\overline{NX}\,\overline{NY}\cos H_o \qquad \text{(A.5)}$$

Analogamente, do triângulo OXY:

$$\overline{XY}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OY}^2 - 2\overline{OX}\,\overline{OY}\cos\zeta_o \qquad \text{(A.6)}$$

sendo que, neste caso, o ângulo referente ao arco XOY é ζ_o. Substituindo em (A.5) e (A.6) as variáveis obtidas em (A.1) a (A.4) e igualando, tem-se:

$$\overline{ON}^2\tan^2(\pi/2-\varphi) + \overline{ON}^2\tan^2(\pi/2-\delta_o) - 2\overline{ON}^2\tan(\pi/2-\varphi)\tan(\pi/2-\delta_o)\cos H_o =$$

$$= \overline{ON}^2\sec^2(\pi/2-\varphi) + \overline{ON}^2\sec^2(\pi/2-\delta_o) - 2\overline{ON}^2\sec(\pi/2-\varphi)\sec(\pi/2-\delta_o)\cos\zeta_o$$

(A.7)

eliminando-se $\overline{ON}^2$ e utilizando-se a igualdade trigonométrica: $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$-2\tan(\pi/2-\varphi)\tan(\pi/2-\delta_o)\cos H_o = 2 - 2\sec(\pi/2-\varphi)\sec(\pi/2-\delta_o)\cos\zeta_o$$

que, isolando $\cos\zeta_o$, resulta em:

$$\cos\zeta_o = \cos(\pi/2-\varphi)\cos(\pi/2-\delta_0) + sen(\pi/2-\varphi)sen(\pi/2-\delta_0)\cos H_o$$

ou

$$\cos\zeta_o = sen\varphi sen\delta_0 + \cos\varphi\cos\delta_0\cos H_o \qquad \text{(A.8)}$$